2012 第2期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387



循序渐进做高考题

——以2011年上海卷数列题展开的高一数列复习课

201600 上海市松江二中 卫福山

每年的高考给广大教师与学生带来很多好题, 若教师在平时的教学中充分利用这些好题, 则对培养学生的能力大有好处. 刚刚过去的2011年全国高考的数学试题, 难度趋于平稳, 中等及偏下的题目占大多数, 很多题目都是学生平时遇到的常规题, 但其中不乏有好题、亮题, 比如理科第22题(文科第23题). 笔者所在学校的一位中年教师就是以这道数列综合性题目为背景, 设计并开设了一堂高一数列复习的校级公开课《等差、等比数列综合问题的研究》, 收效甚好.

一、教学过程简录

师: 前面我们已经学完了等差、等比数列的概念、通项公式、前n项和的公式以及有关性质, 今天我们将运用它们解决有关等差、等比数列的综合性问题.

问题1　已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中, $a_n=13n-19$, $b_n=|a_n|$, 设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n, 求S_{10}、S_n.

教师提问: ① 数列$\{b_n\}$是等差数列吗? ② 如何求S_{10}、S_n?

在师生的共同讨论下, 得出了正确的解答.

解: $b_n=|3n-19|=\begin{cases}19-3n, & 1\leqslant n\leqslant 6,\\ 3n-19, & n\geqslant 7\end{cases}$

$$=\begin{cases}-a_n, & 1\leqslant n\leqslant 6,\\ a_n, & n\geqslant 7.\end{cases}$$

于是
$$\begin{aligned}S_{10}&=-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\\&\quad+(a_7+a_8+a_9+a_{10})\\&=-\frac{6(-16-1)}{2}+\frac{4(2+11)}{2}=77,\end{aligned}$$

$$S_n=\begin{cases}-(a_1+a_2+\cdots+a_n), & 1\leqslant n\leqslant 6,\\ -(a_1+a_2+\cdots+a_6)\\ \quad+(a_7+a_8+\cdots+a_n), & n\geqslant 7\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{35}{2}n, & 1\leqslant n\leqslant 6,\\ \dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{35}{2}n+102, & n\geqslant 7.\end{cases}$$

问题2　已知数列$\{c_n\}$的通项公式为$c_n=\begin{cases}3n-19, & n=2k-1,\\ 2^n, & n=2k,\end{cases}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$, 求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

教师提问: 数列$\{c_n\}$有什么特点? 能否找到与问题1的联系?

生: 数列$\{c_n\}$是一个分段数列(就类似于分段函数一样), 问题1中数列$\{b_n\}$实质上也是分段数列, 两个问题的差异就是分段(分类)的标准不同而已.

师: 能否将两个问题中两个数列描述得更具体一些?

生: 问题1中数列$\{b_n\}$的两个分段数列都是等差数列, 只是公差不同而已, 而问题2中数列$\{c_n\}$的两个分段数列由一个等差数列和一个等比数列交替组成的, 可以采用分组求和法.

在师生的讨论下, 完成本题的解答.

解: $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$$=\begin{cases}\underbrace{(c_1+c_3+\cdots+c_n)}_{\frac{n+1}{2}=k}\\ +\underbrace{(c_2+c_4+\cdots+c_{n-1})}_{\frac{n-1}{2}=k-1}, & n=2k-1,\\ \underbrace{(c_1+c_3+\cdots+c_{n-1})}_{\frac{n}{2}=k}\\ +\underbrace{(c_2+c_4+\cdots+c_n)}_{\frac{n}{2}=k}, & n=2k.\end{cases}$$

$(k\in\mathbf{N}^*)$

$$=\begin{cases}3k^2-19k-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}\cdot 4^{k-1}, & n=2k-1,\\ 3k^2-19k-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}\cdot 4^k, & n=2k.\end{cases}$$

$(k \in \mathbf{N}^*)$.

问题3 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n-19$, $b_n = 2^n$. 在问题1、2的提示下, 能否利用数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构造一个新数列 $\{c_n\}$, 并研究其基本性质.

师:数列的基本性质主要有哪些?

生:通项公式、求和公式、最值等.

师:通过数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, 我们能构造哪些新数列 $\{c_n\}$ 来研究呢?

生: ① $c_n = a_n \pm b_n = (3n-19) \pm 2^n$;

② $c_n = a_n \cdot b_n = (3n-19) \cdot 2^n$;

③ $c_n = \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{3n-19}{2^n}$;

师:以上数列的求和是什么方法?

生:分组求和法、错位相减法.

师:还能构造其他数列吗?

此时学生没有了想法, 教师直接提出一个构造想法, 引到高考题.

师: ④ 研究数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项按照从小到大的顺序构成的新数列 $\{c_n\}$ 的通项公式与求和公式.

解答如下:

$a_7 = 2 = b_1$, $c_1 = 2$,

$a_9 = 8 = b_3$, $c_2 = 8$,

$a_{17} = 32 = b_5$, $c_3 = 32$,

$a_{49} = 128 = b_7$, $c_4 = 128$,

$\cdots$

通过不完全归纳, 易猜想 $c_n = 2 \cdot 4^{n-1}$.

下面通过数学归纳法加以证明(证明公共项即数列 $\{b_n\}$ 的奇数项).

当 $n=1$ 时, $a_7=2=b_1$, 而 $c_1=2$, 故成立;

假设当 $n=k\,(k \geqslant 1)$ 时, 有 $b_{2k-1} = a_m$, 即 $2^{2k-1} = 3m-19$. 那么当 $n=k+1$ 时,

$b_{2k+1} = 2^{2k+1} = 4 \cdot 2^{2k-1} = 4(3m-19) = 12m-76 = 3(4m-19)-19 = a_{4m-19}$.

同时, $b_{2k} = 2^{2k} = 2 \cdot 2^{2k-1} = 2(3m-19) = 3\left(2m - \dfrac{19}{3}\right) - 19$, 但 $2m - \dfrac{19}{3} \notin \mathbf{N}^*$, 故 b_{2k} 不可能是公共项.

以上说明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项有且只能是数列 $\{b_n\}$ 的奇数项.

于是数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n = 2 \cdot 4^{n-1}$, 求和公式为 $S_n = \dfrac{2}{3}(4^n-1)$.

有了问题3的铺垫之后, 教师给出另一种构造的例子, 即2011年全国高考上海卷理科第22题, 文科第23题的综合.

问题4 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n+6$, $b_n = 2n+7\,(n \in \mathbf{N}^*)$. 将集合 $\{x|x=a_n, n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{x|x=b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 的元素从小到大依次排列, 构成数列 $\{c_n\}$.

(1) 求证: 在数列 $\{c_n\}$ 中, 但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$;

(2) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式;

(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $4n$ 项和 $S_{4n}\,(n \in \mathbf{N}^*)$.

解: (1) ① 任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 设 $a_{2n-1} = 3(2n-1)+6 = 6n+3 = b_k = 2k+7$, 则 $k = 3n-2$, 即 $a_{2n-1} = b_{3n-2}$.

② 假设 $a_{2n} = 6n+6 = b_k = 2k+7 \iff k = 3n - \dfrac{1}{2} \notin \mathbf{N}^*$, $\therefore a_{2n} \notin \{b_n\}$.

$\therefore$ 在数列 $\{c_n\}$ 中, 但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2, a_4, \cdots, a_{2n}, \cdots$.

(2) $b_{3k-2} = 2(3k-2)+7 = 6k+3 = a_{2k-1}$, $b_{3k-1} = 6k+5$, $b_{3k} = 6k+7$, $a_{2k} = 6k+6$,

$\because 6k+3 < 6k+5 < 6k+6 < 6k+7$,

$\therefore$ 当 $k=1$ 时, 依次有 $b_1 = a_1 = c_1$, $b_2 = c_2$, $a_2 = c_3$, $b_3 = c_4$, $\cdots\cdots$,

$$\therefore c_n = \begin{cases} 6k+3, & (n=4k-3), \\ 6k+5, & (n=4k-2), \\ 6k+6, & (n=4k-1), \\ 6k+7, & (n=4k), \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}^*).$$

(3) $c_{4k-3} + c_{4k-2} + c_{4k-1} + c_{4k} = 24k+21$,

$S_{4n} = (c_1+c_2+c_3+c_4) + \cdots + (c_{n-3} + c_{n-2} + c_{n-1} + c_{4n}) = 24 \times \dfrac{n(n+1)}{2} + 21n = 12n^2 + 33n$.

二、笔者的一些反思与想法

本节课从一个等差数列出发, 通过加绝对值构成一个新数列, 其实质就是两个等差数列组合成的一个新数列, 但不再是等差数列, 然后用一个等差数列与一个等比数列奇偶间隔组成一个新数列, 问题3、4即将两个数列的公共项与所有项按照大小顺序组成新数列(类似于集合中的求交集与并集), 整节课的教学设计难度上层层深入, 想法上也不断改进与增加难度. 特别是问题

(下转第2-9页)

玩中学 做中思 演中悟

——《不等关系与不等式》课例与启示

313000 浙江省湖州二中 刘 薇

2011年5月，笔者观摩了浙江省湖州市直属高中数学课堂教学比赛，课题是人教版高中数学必修5第三章第1节《不等关系与不等式》，大家普遍认为湖州二中沈恒老师的课“可学、可及、可用”，且对数学探究的活动联系到物理知识，处处体现数学之用. 现将课堂教学实录整理如下，与大家交流.

1. 课堂实录

1.1 情境创设，引入课题

(展示第一幅图片：苏轼“题西林壁”)(直观不等)

师：很高兴与大家一起学习不等关系与不等式，我们从这幅图开始今天的课程之旅. 同学们有怎样的“直观”感受呢?

生：感受到自然的伟大，从层峦叠嶂的山峰中“直观”感受山峰的高低不等.

(展示第二幅图片：身高关系)(思考不等)

师：两个身高测量值均为198cm的人，他们的身高是否完全一致呢?

生：要是精确度提高到毫米级，甚至纳米级，那么两个人的身高是不一样的!

师：很好! 那说明“相等是相对的，不等是绝对的!”不等普遍存在于我们的生活中.

(展示第三幅图片：中国古代利用杠杆原理制作的器械)(运用不等)

师：我们的祖先很聪明，已经把不等关系和杠杆原理运用到生活中去，制作方便生活的器械. 从上面三幅图，我们一起感受“直观不等——思考不等——运用不等”，这就是我们为什么要学习不等关系的原因.

1.2 数学应用，深化理解

第一阶段：自然描述

师：我们已经学习过很多相等关系，比如某次单元测试，两位同学的分数是相同的等等. 那么，在你生活的周边，是否存在不等的数量关系呢? 你能用自己的语言将其描述出来吗?

(教师采用了分组抢答的形式，每说出一个，给其所在小组加上一分，最后看看哪个组对观察生活中的不等关系较为细致，限时3分钟)

生1：我的眼镜度数和我同桌的不一样.

(教室气氛因学生抢答而活跃，笑声不断)

生2：我的体重和老师您的不一样.

生3：校园里的大树粗细程度不一样.

……

(学生边回答，教师边给各组加分)

师：很好! 大家对生活周边的观察比较细致. 第一阶段，第一组和第四组的同学表现最为优秀. 能够发现身边的数学当然很好，这说明同学们已经走进了数学学科之门，但能用数学的眼光、数学的观点进行抽象、归纳，完成这些量与量的比较过程，是我们每个研究数学的人要去做的，那么，我们可以用所研究过的什么知识来表示这些数量关系呢?

生：可以用不等式来表示.

(用不等号将两个解析式连结起来所成的式子叫不等式)

师：下面，我给大家准备一些不等的数量关系，同学们能否用不等式将它们表示出来呢?

第二阶段：数量关系

(教师给出八个生活实例，按组抢答)

[实例1] 2006年8月10日超强台风桑美登陆浙江，其风暴半径为400公里，台风中心位置距离湖州为d公里，若湖州未受此台风带来较强破坏，写出不等式：______.

生1：$d \geqslant 400$.

[实例2] 天气预报说：明天最低温度为9°C,

明天最高温度为15°C, 明天的温度为t°C, 写成不等式是:______.

生2: $9 \leqslant t \leqslant 15$.

[实例3] 三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 写出不等式:______.

生3: $a-b<c<a+b$.

师: 前三道例题同学们抢答很积极, 命中率很高, 请落后的组加油参与!

(课堂气氛保持活跃)

[实例4] 今年各地爆出"染色馒头"事件, 柠檬黄使用的最大标准是0.1g/kg, 但却被超量用于制作"玉米馒头", 现有面粉m(kg), 若正确使用柠檬黄x(g), 写出不等式:______.

生4: $x \leqslant 0.1m$.

[实例5] 我们知道点到直线上任意一点的距离x中垂线段d最短, 请写出不等式:______.

生: $d \leqslant x$.

[实例6] 某品牌酸奶的质量检查规定, 该酸奶中非脂乳固体含量的百分比f应不少于6.5%, 乳含量的百分比p应大于80%, 写成不等式:______.

生6: $f \geqslant 2.5\%$且$p>80\%$.

师: 能不能用数学符号来代替"且"呢?

生6: 可以用$\begin{cases} f \geqslant 2.5\%, \\ p>80\% \end{cases}$来表示, 大括号就是用来表示"且"的.

[实例7] 数轴上到原点距离大于等于1的点M的集合, 写出不等式:______.

生7: $\{x||x| \geqslant 1\}$.

[实例8] b克糖水中含糖量为a克, 现加入m克糖, 糖水的味道会变得越来越甜, 请把此数量关系写成不等式:______.

生8: $\dfrac{m+a}{m+b}>\dfrac{a}{b}$.

师: 很好! 同学们不仅能用自然语言描述生活中的不等数量关系, 而且还能将生活实例用数学式子表示出来! 能用不等式及不等式组把这些不等关系表示出来, 也就是建立不等式数学模型的过程, 通过对不等式数学模型的研究, 反过来作用于我们的现实生活, 这才是我们学习数学的目的.

第三阶段: 实际问题

(此时, 同学们已真正进入了本节课的学习状态, 老师再用投影仪给出两个问题. 问题是数学研究的核心, 以问题展示的形式来培养学生的问题意识与探究意识)

[问题1] 某种杂志原以每本2.5元的价格销售, 可以售出8万本. 据市场调查, 若单价每提高0.1元, 销售量就可能相应减少2000本. 若把提价后杂志的定价设为x元, 怎样用不等式表示销售的总收入仍不低于20万元呢? 请用不等式或不等式组把此实例中的不等关系表示出来, 不必解答.

生: 可设杂志的定价为x元, 则销售量就减少$\dfrac{x-2.5}{0.1} \times 0.2$万本.

师: 那么销售量变为多少呢? 如何表示?

生: 可以表示为$\left(8-\dfrac{x-2.5}{0.1} \times 0.2\right)$万本, 则总收入为$\left(8-\dfrac{x-2.5}{0.1} \times 0.2\right) x$万元, 即销售的总收入为不低于20万元表示为

$$\left(8-\frac{x-2.5}{0.1} \times 0.2\right) x \geqslant 20.$$

[问题2] 某钢铁厂要把长度为4000mm的钢管截成500mm和600mm两种, 按照生产的要求, 600mm钢管的数量不能超过500mm钢管的3倍. 怎样写出满足上述所有不等关系的不等式?

师: 设截得500mm的钢管x根, 截得600mm的钢管y根. 根据题意, 应当有什么样的不等量关系呢?

生: 截得两种钢管总长度不能超过4000mm.

生: 截得600mm钢管数量不能超过500mm钢管的3倍.

生: 截得两种钢管的数量都不能为负.

师: 上述的三个不等关系是"或"还是"且"的关系呢?

生: 它们要同时满足条件, 应该是且的关系.

生: 由实际问题的意义, 还应有x、$y \in \mathbf{N}$.

师: 这位同学回答得很好, 思维很严密. 那么我们该用怎样的不等式组来表示此问题中的不等关系呢?

生: 要同时满足上述三个不等关系, 可用以下不等式组来表示: $\begin{cases} 500x+600y \leqslant 40000, \\ 3x \geqslant y, \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ x、y \in \mathbf{N}. \end{cases}$

师: 回答很准确. 通过上述两个问题的探究,

同学们对如何用不等式或不等式组把实际问题中所隐含的不等量关系表示出来，这一点掌握得很好.

师：通过前面的例子，你有何体会？

生：我感到学习数学可以帮助我们解决生活中的实际问题，数学就在我们的身边，与我们的生活联系非常紧密.

1.3 自主探究，抽象概括

师：数学来自生活，用于生活. 华罗庚大师说："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学."今天，就让我们追寻先哲的足迹一起来体会.

如图1所示，数学实验——构建一个电路回路，利用滑动电阻块进行移动. 你能从实验中总结出怎么样的不等关系吗？并加以证明吗？

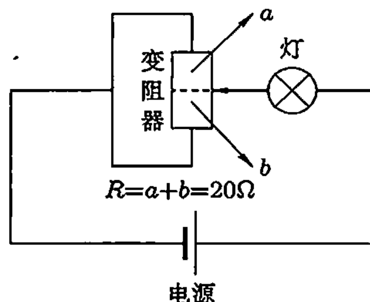


图 1

师：我带来了物理元件，请同学们按照电路图搭建实物图.

（学生跃跃欲试，自告奋勇上讲台搭建实物图，学生拉动滑块进行演示）

生：我发现当滑块从上往下移动过程中，灯泡由最亮到最暗，再到最亮！

师：其灯泡从亮——暗——亮的过程，意味着整个电路的实际电阻进行着怎样的变化呢？

生：实际电阻从小——大——小！

师：很好，这是一个什么电路？

生：这是一个并联电路.

（滑动变阻器$r=20$欧姆，上半部分为a欧姆，下半部分为b欧姆，电路实际电阻记为r）

师：我们来计算电路的实际电阻.

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow r=\frac{ab}{a+b}=\frac{ab}{R},$$

什么时候最暗？滑块在中间！即：

$$r=\frac{ab}{R}\leqslant\frac{10\cdot 10}{R}=\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{R},$$

我们将其数学化，可得到一个不等式.

生：当$a>0$, $b>0$时，$ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

师：能否证明其正确性？

生：可以用作差法证明，即：

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

当且仅当$a=b$时等号成立.

师：作差法是不等式证明的一种常用方法，其步骤分为作差——变形——判断符号，随着不等式学习的深入，我们将会更多地接触作差法.

1.4 课堂小结，渗透文化

师：证明上述不等式不难，难的是在"看不见数学"的地方发现数学，具有良好的不等观念和数学意识. 我们只有懂理，才能说理，对待事物，才能产生联想、启发，才能将"心声"流于笔端. 正如清代学者袁枚说："学如箭簇，才如弓弩，识以领之，方能中鹄."不知道同学们有这样的感受吗？

生：通过学习，我感受到了生活中无处不在的不等关系，尝试用不等式或不等式组表示实际问题中的不等关系；通过具体实际问题能培养不等的意识；在生活中挖掘数学的元素，用数学眼光来感受生活.

师：同学们说得很好！我送给大家一副春联，上联是——赏实例，赏古赏今万物均含不等；下联是——求知识，求表求里凡事究其所以；横批——感悟不等！

（课堂气氛推向高潮，给出课堂思考1）

师：对糖水加糖更甜的不等关系你会证明吗？即$b>a>0$, $m>0$时，$\frac{m+a}{m+b}>\frac{a}{b}$成立吗？

生：可以用作差法证明.

（给出课堂思考2）

师：开放性问题：已知不等式组

$$\begin{cases}x+y\geqslant 50,\\ x+y=100,\\ x\geqslant 1, y\geqslant 1,\\ x、y\in\mathbf{N},\end{cases}$$

你能举出符合此不等式组的实际问题吗？

师：贾岛诗云：松下问童子，言"师"采药去，云深不知处，只在此山中. 同学们，要向追寻师傅一样不断寻找实际问题中的不等关系、探求生活中的数学元素、欣赏高中数学的真善美！

2. 几点启示

课后沈老师介绍:非比赛型的公开课上过多节,但是比赛型的公开课参与得不多,对公开课要“气氛”还是要“深度”、要“热热闹闹课堂情境”还是要“注重知识、文化渗透”一直很纠结.课改动了3次,最后定型介于平衡,凝结了整个教研组同仁的智慧,在此特别感谢陆芳敏老师、罗展华老师等等其他同行的建议和斧正.

笔者认为,一堂好的公开课不外乎四点:基本功、科学性、参与度、新鲜感.在课堂教学中如何才能合理地做到这些呢?受本课启发,收获下面几点启示:

2.1 生本意识,立足可动

《普通高中数学课程标准(实验)》指出:“学生的数学学习活动不应只限于接受、记忆、模仿和练习,高中数学课程还应倡导自主探索、动手实践等学习数学的方式.这些方式有助于发挥学生学习的主动性,使学生的学习过程成为在教师引导下的‘再创造’过程.为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件,以激发学生的数学学习兴趣,鼓励学生在学习过程中养成独立思考、积极探索的习惯.高中数学课程应力求通过各种不同形式的自主学习、探究活动,让学生体验数学发现和创造的历程,发展他们的创新意识.”可以说,没有学生参与的课堂是低效的、无能的,而学生能否动起来,立足两点:首先课程的设计以生为本,其次教师对学生的引导、调动.

本课中,为学生“动”设计了两个平台.其一,分组模式探讨不等数量关系与实例;其二,电路实验让学生积极参与,教师并未将实验结论告诉学生,通过他们的自主探究,注重了知识形成的过程,感受了数学的无处不在!本课新知建构较为自然,教案设计考虑学生的认知基础,每一步都是在学生思维的最近发展区内进行,学生抢答、参与、实验、小结等给予了充分时间,真正做到能让课堂“动”起来!

2.2 问题探究,感受数学

很多时候,数学课只能围绕数学展开,像华罗庚大师所说“无处不用数学”这句话难以联系其他知识.

本课前段借助生活实例来推进教学,先后设置了三个板块引领学生思考、探究,第一板块自然描述生活周边的不等关系,起到提取记忆、活跃课堂的作用;第二板块抢答不等数量关系,起到承上启下的过渡作用;第三板块两个稍难的实际问题,正是本课重点——学会用不等式或不等式组表示实际问题中的不等关系,起到画龙点睛的作用.三部分层层递进,问题的设置符合学生由易到难的认知规律,符合其意愿.

本课后段较为新颖地设立“数学探究”——借助物理电路实验,从探究中启发学生探求生活周边的不等关系,通过学生自主探究,注重合情推理、归纳演绎及知识形成的过程,真正感受了数学的无处不在!其点睛之笔在:

$$r=\frac{ab}{R}\leqslant\frac{10\cdot 10}{R}=\frac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2}{R}$$

!我们将其抽象归纳,可得不等式:当$a>0,b>0$时,$ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.这就是“见证奇迹的时刻”.

总之,整堂课围绕以问题为载体、以探究为主线,让学生感受了“玩中学、做中思、演中悟”.

2.3 建立观念,渗透文化

《普通高中数学课程标准(实验)》指出:“数学课程应帮助学生了解数学在人类文明发展中的作用,逐步形成正确的数学观.”

数学之美,低端欣赏在于“美观”层次;数学美的“高端”欣赏在于和人文意境的沟通.本课从庐山大自然的美景到中国古代利用杠杆原理制作的器械,从利用对联小结到袁枚、贾岛的诗句,都有直观的背景,更多属于意境的沟通与升华,不断在向学生渗透数学文化、让学生懂得欣赏数学中的不等关系,在头脑中建立起不等观念,用数学的眼光来感受生活.

2.4 概念感受,切勿惜时

去年4月,章建跃博士在湖州做了一个讲座,以大量篇幅谈了概念教学的问题,应把教育关注的重点落在数学的内容、方法和意义的理解上,并多次在谈到了概念教学要注重理解,“不惜时、不惜力”!

对于本课,整堂课围绕着感受不等建构,笔者也更关注感受概念带来的思考,数学认识事物的思想精华,蕴含着最丰富的创新教育的素材,切勿惜时惜力.学生在课堂中所学习的、感知的、养成的思维方式、方法迁移能力也会加强,长此积累,学生的数学素养必将提高.

《反正弦函数》第一课时的教学实践对比与再设计

200120　华东师范大学附属东昌中学(华东师范大学数学系教育硕士)　左佳平

数学概念教学一直是数学教学的重点和难点, 不同教师对同一数学概念进行的教学, 可能会产生不同的效果, 值得我们进一步反思与再设计. 2011年6月初华东师范大学附属东昌中学的两位老师同时就"反正弦函数"第一课时开设了公开课. 使用的教材都是上海教育出版社的《数学·高中一年级第二学期(试用本)》.

华东师范大学附属东昌中学是上海市浦东新区重点高级中学之一, 执教的两位老师分别是有16年教龄的区骨干教师和有18年教龄的一级教师, 为叙述方便, 将两位分别记为A教师、B教师.

本文拟对这两堂课进行对比分析, 然后从"逆运算符"的角度, 运用概念同化的方式对该课进行教学再设计.

一、教学实践过程

环节1: 问题引入.

A教师用时6′05″, B教师用时2′44″.

A教师	B教师
教师呈现"已知角求三角比"和"已知三角比的值求角"这两类问题,学生对照$y=\sin x$的图像, 发现$\sin\alpha=\frac{1}{3}$在$\alpha\in[0,2\pi]$上有两个解, 并用计算器求得近似值. 教师追问: 若已知$\sin\alpha=a$, $a\in[-1,1]$, 则角α如何表示? 学生想到"可用反函数表示."并由预习知$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上有反函数. 教师问"为什么研究好$y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数, 就可以解决当$\sin\alpha=a$时如何表示角$\alpha$呢?" 学生沉默.	教师提问: 为何要研究反正弦函数这一新的概念? 并简述R.Wilder的数学概念进化理论. 学生听讲. 再问: 已知在$\triangle ABC$中, $\sin A=\frac{1}{3}$, 如何求角A? 学生思考.

环节2: 探究反正弦函数的定义.

A教师用时14′03″, B教师用时13′16″.

A教师	B教师
学生举例, 回顾互为反函数的函数. 教师类比$y=3^x$的反解$x=\log_3 y$, 明确引入中的问题, 即对$\sin\alpha=a$, $a\in[-1,1]$进行反解. 同时与学生探讨: 什么样的函数有反函数? 三角函数是否一定有反函数? 用什么形式表示? $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$是最优的区间吗? 学生讨论, 并说出两个理由, 教师补充一个. 最后, 给出反正弦函数的定义.	教师呈现四个函数: $y=x^2+1$; $y=\sqrt{x}-1$, $x\in[1,+\infty)$; $y=x^2+1$, $x\in[0,+\infty)$; $y=\sqrt{x-1}$, $x\in[1,+\infty)$, 让学生思考: 怎样的函数有反函数? 教师追问$y=\sin x$, $x\in\mathbf{R}$有反函数吗? 如何选择合理区间D, 使得$y=\sin x$在区间D上有反函数? 学生选择区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 并说出一个理由, 教师补充三个. 最后给出反正弦函数定义.

环节3: 理解.

A教师用时7′36″, B教师用时1′55″.

A教师	B教师
教师呈现英语字典上arc的解释, 引导学生谈谈对$\arcsin x$的理解, 要求对$\arcsin x$所示的角进行扩句、修饰, 学生讨论后依然回答不全. 教师强化$a=\arcsin x$的反解过程, 解释$\arcsin x$的三层含义.	教师讲解$\arcsin x$的三层含义, 并以$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$为例再解释一遍, 学生听讲.

环节4: 巩固练习.

A教师用时8′12″, B教师用时1′35″.

A教师	B教师
题1　说说下列各式是否有意义: $\arcsin\frac{2}{3}$, $\arcsin\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\pi$, $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. 学生对最后一题产生争鸣. 题2　求值: $\arcsin 0$, $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin 1$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin(-1)$. 学生快速口答, 猜想得. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.	题1　口述下列符号的含义: $\arcsin 1$, $\arcsin 0$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\sqrt{2}$. 学生齐答.

环节5: $\arcsin x$的应用.

A教师用时6′03″, B教师用时16′40″.

A教师	B教师
题3 用反正弦函数值的形式表示下列各式中的x: $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{5}, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin x=-\frac{1}{4}, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x\in[0,\pi]$. 最后一题, 学生直接给出两解, 老师补充将区间 $[0,\pi]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 分类讨论的过程. 用时4′07″.	题2 用反正弦函数值的形式表示下列各式中的角A: $\sin A=\frac{1}{3}$, $A\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin A=-\frac{1}{3}, A\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; 在$\triangle ABC$中, 已知 $\sin A=\frac{1}{3}$, 求角A; $\sin A=-\frac{1}{3}, A\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$. 学生顺利解决前三小题, 第三小题也仅用时1′59″. 但在第四小题中, 学生虽报出了正确的答案却无法解释. 教师利用$y=\sin x$的图像说明, 并验证 $\arcsin\frac{1}{3}-\pi$是正弦值为$\frac{1}{3}$, 且在主值区间内的角, 共用时11′38″.

环节6: 小结与思考.

A教师用时2′53″, B教师用时4′15″.

A教师	B教师
引导学生反思: 说说看你对反正弦函数的认识? 你是否已经得到了关于$\arcsin x$的相关性质? 研讨: 已知 $\arcsin(\cos x)=\frac{3\pi}{2}-x$, 求$x$的值.	教师简单小结, 提出两个思考. 1. 已知任意角的正弦值, 是否均可利用反正弦函数值表示出这个角的确切值? 2. 类比$a^{\log_a N}=N$, 你能得出有关的哪些等式? 学生思考.

二、对比分析与反思

2.1 教学目标的对比

两位教师都把教学目标定在理解反正弦函数的概念, 会用反正弦函数值表示角的大小上, 与课标的要求相符, 可以说教学目标的确定差别不大. 但在具体教学的过程中侧重点各有不同, 效果也迥异. A教师侧重于反正弦函数概念的理解, B教师侧重于用反正弦函数值表示角的大小(两位教师在这两方面花费的时间分别是: A教师: 21′39″和6′03″; B教师: 14′11″和16′40″).

课后反思中, A教师说:“问渠哪得清如许, 为有源头活水来.”她之所以在理解反正弦函数的概念上花费较多的时间和精力是因为概念清楚了, 求值的问题在以后的学习中自然而然就会解决; 而如果概念模糊不清的话, 会对以后的学习造成障碍, 似有本末倒置之嫌. 在之后的教学中, 我们也发现两位教师在讲解用反正弦函数值表示角的大小时, 虽然所选用的例题题量、难度相仿, 但A教师费时少得多.

2.2 引入的对比

两节课的引入都是为了解决“为何要引进反正弦函数这一概念”展开的, 但两位老师在处理上略有不同. A教师先回顾并抽象地提出了三角中的两类问题:“已知角求三角比”和“已知三角比的值求角”, 然后提出一个具体的问题即“已知正弦比的值求角”, 请学生借助计算器求解, 最后追问“当$\sin\alpha=a, a\in[-1,1]$, 角α如何表示”. 问题设计层层深入, 由抽象到具体, 再到一般, 使引入反正弦函数的必要性呼之欲出.

B教师上课伊始即提出“为何要引进反正弦函数这一概念”, 导向明确. 然后介绍R. Wilder的数学概念进化理论, 最后提出一个与A教师相同的具体问题“已知正弦比的值求角”, 请学生思考. 但笔者认为R.Wilder的理论对于学生来说难以理解, 不适合在高中课堂上介绍.

2.3 概念获得的对比

两位教师在教学中都将反正弦函数的概念同化到原有的反函数的认知结构中, 通过回顾反函数的概念, 引导学生选择合理的区间求解正弦函数的反函数. 但“为什么研究好$y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数, 就可以解决当$\sin\alpha=a$时如何表示角$\alpha$呢?”, A教师类比$y=3^x$的反解$x=\log_3 y$, 对$\sin\alpha=a, a\in[-1,1]$进行反解的解释似乎更有说服力, 概念同化的逻辑性也更强.

2.4 难点突破的对比

课后的访谈中两位老师均表示, 本节课的难点在于对符号$\arcsin x$的理解, 她们都提到了该符号的三层含义, 但所用的方法各不相同. B教师在给出反正弦函数定义后, 口述了$\arcsin x$符号的三层含义, 之后又以$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$为例再解释了一遍. 老师说得很明确, 只是不知学生领会了几层, 如果$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$的解释由学生来完成是否效果更好?

A教师在这部分似乎花了更多的心思. 她先给出了arc的英语解释, 引导学生讨论$\arcsin x$的含义. 在讨论陷入僵局时, 明确要求对$\arcsin x$表示的角进行修饰和扩句. 并通过强化$a=\arcsin x$反解的过程, 解释$\arcsin x$的三层含义,

使这三层含义有据可循. 之后, 两位老师都立刻配以巩固练习, 除了常见的正例外, 均出现了形如$\arcsin\sqrt{2}$、$\arcsin\pi$的反例. 特别是A教师的$\arcsin\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, 引起了学生的争论.

2.5 *例、习题教学的对比*

两位老师的例、习题可分为三类, 一是对符号$\arcsin x$的巩固理解, 二是特殊值求角, 三是用反正弦函数表示角的大小. 所用的教学方式大致相同: 学生先做, 老师后点评. 但所选的例、习题略有出入.

A教师选用的$\arcsin\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$深化了学生对$\arcsin x$的理解, 也是进一步探索何时$\arcsin(\sin x)=x$的契机, 可惜该教师没有抓住. A教师还有意识地将一些特殊角成对出现, 使学生很容易猜想得$\arcsin(-x)=-\arcsin x$.

B教师将一、二两类问题合并, 节约了时间, 但同时学生也失去了探索$\arcsin(-x)$性质的机会. 在第三类问题中, B教师的最后一问:"已知$\sin A=-\dfrac{1}{3}, A\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$, 试用反正弦函数表示角A"最为复杂. 学生虽报出正确答案却无法解释, 而B教师也仅是用"正弦函数图像"和"求该角正弦值"两种方法验证了该生所说的答案是正确的, 费时11′38″, 其实用计算器验证岂不更快? 但真正令人困惑的是如何求得这个正确答案的, 这一问题一直悬而未决.

2.6 *反思*

何小亚在《中学数学教学设计》中指出: 概念教学的本质不是低水平的概念言语连锁学习, 而是要帮助学生在脑中形成概念表象, 帮助学生在脑中建构起良好的概念图式, 而良好的概念图式是由一系列反应概念本质属性的观念组成的.

在反正弦函数中, 反映$\arcsin x$本质属性的观念至少应该包括以下几点: ① $\arcsin x$是$\sin\alpha=x, x\in[-1,1]$反解的结果; ② 它表示一个弧度制下的角; ③ 这个角的范围在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$中; ④ 这个角的正弦值为$x$; ⑤ $x\in[-1,1]$; ⑥ $\arcsin x$、$\log_a x$和$\sqrt{x}$一样都是数学符号. …… 因此, 反正弦函数不仅可以如上述两位老师那样同化到反函数的认知结构中, 也可以同化为"逆运算符"的认知结构中. 如果说反函数概念使得"已知三角比求角"问题的解决成为可能, 那么"逆运算符"则是$\arcsin x$的本质. 所以, 在教学设计中, 概念同化应更遵循后一条轨迹, 反函数概念则只是创造新的"逆运算符"的理论依据. 循着这样的轨迹, 使学生经历"再创造"的过程, 体会数学创新的乐趣. 此外, 与$\arcsin x$有关的三个等式即性质, 也是对反正弦函数概念的深化, 应该在这堂课上讲解, 符合教学目标.

基于以上的对比与反思, 笔者对《反正弦函数》第一课时进行了教学再设计.

三、教学再设计

教学主题: 反正弦函数第一课时

教学目标:

1. 回顾$\log_a x$、$\sqrt{x}$的产生过程, 掌握$\arcsin x$符号的含义, 经历数学"再创造"的历程.

2. 理解反正弦函数的概念, 驳斥反例, 知道反正弦函数的性质.

3. 会用反正弦函数的值表示角的大小, 知道数学内容中普遍存在的相互联系、相互转化的规律.

教学重点与难点:

重点: 理解反正弦函数的概念.

难点: 掌握$\arcsin x$符号的含义.

教学设计: 新课引入.

① 两类问题.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
答题.	呈现问题: 1. 已知$A=\dfrac{\pi}{3}$, 求$\sin A$的值. 2. 已知$\sin A=\dfrac{1}{3}$, 求A角的值.	1. 比较这两类问题的区别. 2. 问题2是问题1的"逆问题". 3. 以前是否研究过如上的、成对的"逆问题"?	理解学习反正弦函数的必要性. 联系旧观念.

② 回顾$\log_a x$、$\sqrt{x}$的产生过程.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
板演. 答题.	呈现问题: 3. 已知$x^2=3$, $x\geqslant 0$, 求x的值. 4. 已知$2^x=3$, 求x的值.	1. 为求解这两类题, 我们都创造了新符号, 新符号带来了新函数. $\sqrt{x}$表示的值非负. 2. 从函数角度解释, 为什么这两题都只有唯一解? 3. $y=x^2, x\in[0,\infty)$和$y=2^x$都有反函数, 它们的反函数都用新符号表示.	形成经验.

③ 预计新符号的特征.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
答题.	提问: 从上面两题的求解经验我们发现, 要解决问题2, 我们要做些什么事?	1. 要求解问题2, 或许也需要创造新符号, 新符号或许还会引入新函数. 2. 这个新符号应该有哪些基本特征? 它表示什么数学量? 是数, 还是角? 3. 新符号所表示的是角, 这角或许有范围, 它的正弦值是 $\frac{1}{3}$. 新符号可以表示新函数, 新函数或许是正弦函数的反函数.	明确任务.

新课教学.

① 反正弦函数的定义.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
讨论. 答题.	提问.	1. $y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 有反函数吗? 为什么? 2. 如何选择区间才能使得 $y=\sin x$ 在其上有反函数? 你选的区间够好吗?	同化概念.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
下定义.	呈现反正弦函数的定义.	1. 介绍"弧度"的英语表达"arc". 2. 试给你心目中的反正弦函数下个定义.	获得概念.

② 掌握 $\arcsin x$ 符号.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
讨论. 答题.	谈谈你对 $\arcsin x$ 这个新符号的理解.	$\arcsin x$ 表示一个弧度制下的角; 这个角的范围在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 中; 这个角的正弦值为 x; $x\in[-1, 1]$; $\arcsin x$ 是 $\sin\alpha=x$, $x\in[-1,1]$ 反解的结果; $\arcsin x$ 和 $\log_a x$、$\sqrt{x}$ 一样都是人们创造的、求解"逆问题"的数学符号.	解剖分析反正弦.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
答题. 争鸣.	说说下列各式是否有意义: $\arcsin\frac{2}{3}$, $\arcsin\frac{\pi}{4}$, $\arcsin\frac{\pi}{2}$, $\sin(\arcsin 2)=2$, $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{3\pi}{4}$.	猜想何时 $\sin(\arcsin x)=x$; 并用 $\arcsin x$ 的含义解释.	巩固理解反正弦. 知道反正弦的两个性质.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
口答. 猜想.	口答求值: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\arcsin 1$, $\arcsin(-1)$.	1. 在这组求值中你发现什么规律? 2. 你能证明你的猜想吗?	巩固理解反正弦. 知道反正弦的另一个性质.

③ 应用 $\arcsin x$ 符号.

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
解答. 口述.	用反正弦函数值表示下列角 A 的大小: $\sin A=-\frac{1}{3}$, $A\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $\sin A=\frac{1}{3}$, $A\in[0,\pi]$; $\sin A=-\frac{1}{3}$, $A\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$.	第二题分类讨论, 合理地使用诱导公式, 详细示例. 第三题学生模仿解答, 注意诱导公式的使用.	会用反正弦函数值表示角的大小.

小结:

学生行为	教师行为	关键语	设计意图
口答.	回忆反正弦函数定义. 说说你对 $\arcsin x$ 符号的认识. 谈谈反正弦函数的性质. 回顾反正弦函数值表示角大小的过程.	……	巩固新知.

参考文献

[1] 上海教育委员会. 上海市中小学数学课程标准[M]. 上海: 上海教育出版社, 2004.

[2] 马晓华, 谢一功, 向荣. "殊途"会"同归"吗——"正弦定理"同课异构的分析 [J]. 数学教学, 2010(4): 4-6.

[3] 何小亚, 姚静. 中学数学教学设计[M]. 北京: 科学出版社, 2009年.

(上接第2-1页)

3的开放性问题"在问题1、2的提示下, 能否利用数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 构造一个新数列 $\{c_n\}$, 并研究其基本性质"激起学生的创新思维与开放性想法. 这进一步体现出高考题中的好题不是光在高三教学中渗透, 在高一高二的常规课中也可以通过巧妙设计达到"循序渐进做高考题"的目的. 其实作为开放性问题, 教师也可以引导学生课下继续研究与探讨从两个基本数列(等差数列与等比数列)出发构造一些新数列.

一样的“哈姆雷特”，异样的“精彩”

——从《双曲线的标准方程》两节课谈起

211800 江苏省江浦高级中学 徐爱勇

有一位名师这样说过: “莎士比亚笔下的哈姆雷特, 如果找1000个演员来扮演的话, 就会有1000个不同的哈姆雷特.” 南京市教研室前段时间开展了“同课异构”的教研活动, 对同一内容——《双曲线的标准方程》开设了两节课(下面为了叙述方便, 简称课堂1和课堂2), 笔者听后, 感受颇丰. 下面就这两节课作如下的比较和分析.

1. 案例背景

《双曲线的标准方程》是选修1-1(文科)或选修2-1(理科)中第二章《圆锥曲线》中的教学内容, 是继椭圆之后的第二种圆锥曲线. 教学的下位目标是了解双曲线的标准方程, 并能初步进行运用; 上位目标是通过与椭圆类比获得双曲线的相关知识, 培养学生类比、分析、归纳、推理等能力和善于寻找数学规律的能力.

2. 案例异同

2.1 新课引入的方式不同

课堂1是从请学生回顾双曲线的几何定义着手, 得到平面内满足条件的动点的轨迹, 并且在黑板上预先画好了两组双曲线, 给学生图形上的直观感受. 这样的引入能让学生很快地进入角色, 很快地吸引学生的注意力.

课堂2是从《椭圆的标准方程》的学习过程中提炼出一组问题串, 通过类比得到双曲线的研究方法. 问题串如下:

问题1: 椭圆的定义是什么?

问题2: 椭圆的标准方程是怎样的?

问题3: 方程中的a、b、c关系如何?

问题4: 如何通过方程来确定椭圆的焦点所在的位置?

这样的引入能让学生自觉地进入研究动点的轨迹状态中去, 激发了学生不断探索新知识的热情.

2.2 根式化简处理的手段不同

课堂1中的老师通过提问第一位学生得到双曲线的定义后, 便快速地和学生共同探究得到$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$, 接下来就让学生自行探究: 如何化简? 合理性怎样? 教师巡视(大约有10分钟), 然后让学生讲出其想法, 并请同学上台来利用实物投影讲评. 我们也看到正是因为有了这10分钟的“空堂”, 才会有后面同学们的精彩“表演”. 通过这段时间的“折磨”, 大部分同学能够完成化简过程. 同时, 还有一位同学说道:“可以构造对称式$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{2c|x|}{a}$, 再把两式平方相加即得.” 通过这一教学片段, 给我们带来的感受是: 课堂中主角的定位很准确.

课堂2中的老师在上述椭圆的系列问题串中, 请同学回答如何化简$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)+y^2}=2a$这一代数方程, 以及化简过程中的一些代换和技巧. 这样就从形与数两个方面给同学们留下了类比的空间, 因此整个双曲线标准方程的推导过程都是由学生上黑板板演而来. 通过这一教学片段, 给我们带来的感受是: 同学们参与的热情很高.

2.3 引出双曲线另一种标准方程的手段不同

课堂1中的老师是请学生反思双曲线标准方程的推导过程, 然后借助黑板上预先画好的双曲线图形, 引导学生先从图形的角度谈两种双曲线的差别. 其中有一位同学说得很好:“我们可以利用坐标轴旋转把问题进行转化, 从而在代数方程中的体现就是互换x、y的位置.” 最后再从代数方程$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)+y^2}|=2a$的角度给予解释.

课堂2中的老师则是引领学生再回到“椭圆标准方程的推导”过程中, 同时提出这样的问题:

怎样推导焦点在y轴上的椭圆标准方程呢? 通过这一问题的回答, 同学们此时已经能够做到吐故纳新. 此时, 该教学片段已经充分地达到这节课的上位目标.

2.4 对双曲线的标准方程的认识方式不同

课堂1在得到双曲线的标准方程后, 幻灯片上出现两个具体的双曲线方程: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$和$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$, 教师请学生写出其焦点坐标, 然后再请学生总结这两个方程所对应的图形在直观上的差别, 最后再和同学们共同归纳出"焦点跟着正的走"这样的口诀.

课堂2在得到方程后, 也以幻灯片的形式展现出这样的问题: 判断下列方程是否表示双曲线? 若是, 求出其焦点坐标. (1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$; (2) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=-1$; (3) $4x^2-2y^2=1$. 该教师同样是用问题串的方式来加深学生对双曲线标准方程在代数意义上的理解; 同时也通过变式, 使同学们体会解题中的辩证思想——透过现象看本质; 变化中抓住不变量.

2.5 例题的讲解效率有所不同

课堂1与课堂2都是把课本上的例题作为例1: 已知双曲线的两个焦点分别为$F_1(-5,0)$、$F_2(5,0)$, 双曲线上一点P到F_1、F_2距离的差的绝对值等于8, 求双曲线的标准方程.

课堂1的教师由于在前面推导标准方程过程中舍得给学生充分地自主探究时间和空间, 这样势必会导致例题教学中所辐射的面不够广.

课堂2的教师则是引导同学们给出了如下的变式:

(1) 把"双曲线上一点P到F_1、F_2距离的差的绝对值等于8"改为"双曲线过点$P\left(6,\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$";

(2) 把"绝对值"三个字去掉, 情况又如何?

通过这一教学片断, 使我们充分体会到: 要想真正落实新课改精神, 我们应多从课本的例习题中寻找知识的"生长点".

3. 案例反思

3.1 总体感受

两节课都非常精彩, 教师都能以民主的精神、开放的态度、合作的方式、宽松的环境组织教学活动, 教学过程呈现出一种双向的交流、动态的建构. 教师能够通过预先设置好的问题情境, 给学生构建好活动平台, 能够真正地将新课改精神落实到实处.

课堂1的教师教态自然, 思路清晰, 严谨又有条理, 能够跟着学生的思路走, 课堂中重视"歧路"分析. 长此以往, 学生的数学素养就不一样了.

课堂2的教师的课堂从语言到教态再到问题串, 处处都给我们透出这样的信息: 激情. 整堂课学生的思维都处在类比的过程中, 形成了很强的正迁移, 如此下去, 我们的课堂教学就真正地做到"有效教学"了.

3.2 商讨之处

(1) 课题的引入不够情境化

对这节课的引入, 笔者还有这样的看法, 即能否从实际问题情境出发, 探究出动点的轨迹形成双曲线图形. 如: 已知A、B两地相距800m, 一炮弹在某处爆炸, 在A处听到爆炸声的时间与在B处听到爆炸声的时间绝对值相差2s, 设声速为340m/s, 问: (1) 爆炸点在什么曲线上? (2) 求这条曲线的方程.

这种以问题为中心, 强调了数学的活动, 同时也给同学们留有充分的自主和创造的空间. 作为一名一线数学教师, 要让学生明白我们所教的数学确实是从现实中来, 逐步抽象而成的, 但它应该也是一种每个人都能理解的、自然的、和谐的数学.

(2) 对标准方程推导的"度"的把握不够到位

课堂1的教师在这里给学生大约10分钟的自主活动时间, 但一开始他未给出适当的引导和规定, 从而导致有些同学出现表达记号比较混乱, 还有一些同学在$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)+y^2}|=2a$这一步就开始平方, 从而后面的时间只能成为无效时间, 以致于只能当"看客". 在推导完标准方程后, 该教师请了3位学生, 分别来谈谈心得体会. 3位学生一律谈的都是"如何化简无理根式?", 并未提到"求轨迹方程"的一般步骤. 遗憾地是, 该教师在这里也并未作出适当的补充, 这样就缺乏一次从"感性"到"理性"的升华.

课堂2的教师在这里主要是借助回顾推导椭圆的标准方程的步骤, 通过类比, 师生共同得到方程$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)+y^2}|=2a$, 此时下面有不少学生在说分两种情况讨论. 但

该教师却说:“这里并不需要讨论, 只需要把上式变形为 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)+y^2}=\pm 2a$ 就可以了”. 当然, 从效果上来看, 这样更有利于我们板演的简洁性, 但从情感的需要来看, 师生在这里可以共同做一个“微型探究”. 这样, 应该更有利于培养学生务实和勇于探索的精神. 虽然椭圆和双曲线是一对“姐妹花”, 从类比推理的角度来看, 这样的处理办法确实很成功, 但从探索和创新的角度来看, 由于情境导入的时间过长, 教师有“包办”的嫌疑.

3.3 给我们带来的教学启示

(1) 发现问题、提出问题比解决问题更重要

爱因斯坦说的这句话, 也许很多教师都会说: 这道理我懂. 确实, 像爱因斯坦说的那样, 解决问题或许是数学或实验上的一个技能而已, 而提出新的问题、新的可能性, 从新的角度去看旧的问题, 却需要创造性的想象力. 但是, 要将这真正地落实到课堂层面确实不容易!

两位教师在本节课的引入方面做得不够情境化, 笔者认为, 本文后来所提供的实际问题则给同学们提供了一个更广阔的舞台. 为此, 我们是否可以这样大声疾呼: 给发现问题、提出问题一个应有的位置吧!

(2) 重实质、轻形式才是数学教学之要义

一谈到“淡化形式、注重实质”, 有的教师可能立即就说: 这道理我更懂, 并且我在实际教学中也做了. 但是, 果真如此吗?

课堂2的师生双边活动开展得十分顺利, 课堂上是一派欣欣向荣的景象. 同学们确实能够很“成功”地获得双曲线方程形式化的表达. 《普通高中数学课程标准(试验)》中指出:“在数学教学中, 学习形式化的表达是一项基本要求, 但是不能只限于形式化的表达, 要强调对数学本质的认识, 否则会将生动活泼的数学思维活动淹没在形式化的海洋里.”

(3) 只有学生亲自体会的数学思想才是有活力的

笔者一直认为数学思想是可以教的, 即只要在教学中为学生提供大量含有相同数学思想的例子, 学生就一定能掌握这种数学思想. 相信很多教师也有同感, 说不定在日常教学中也是这样做的. 但是, 通过对课堂2引入的反思, 笔者对这一观念产生了很大的怀疑. 因为在课堂上我们只看到学生在做这些相关的问题, 但却不知道学生在做时究竟想些什么. 表面上看, 学生一直在动手动脑, 但从认知心理学角度来看, “做”不一定能代替学生“想”, 数学思想的形成是一个不停反思的过程. 如果教学中过分强调程序, 就无法促进学生进一步理解要体验的抽象概念了. 而课堂1虽然在引入时并不是很顺利, 但是它是由学生自己主动地“思索”而孕育的“新生”, 从而就有了别样的精彩.

一节课成功与否, 是要看有没有高水平的思维活动, 有没有围绕学科概念的本质和主要的思想方法, 有没有在学生的认知基础上提出问题, 引发学生在最近思维发展区积极地思考, 培养学生的思维能力, 帮助其逐渐形成良好的学习方法.

通过“同课异构”这样的方式, 使我们更多的数学一线教师思想更丰富, 感受更深刻. 有思想的教师, 必然能够教育出更有思想、更有能力的学生.

参考文献

[1] 雷晓莉, 王芝平. “同课异构”的比较与反思[J]. 中学数学教学参考(高中), 2008(7): 7-9.

[2] 陈丽琴. “同课异构”——不一样的精彩[J]. 中学数学月刊, 2009(9): 30-32.

[3] 汪国华. 数学教学的“本源性”——两个案例的启示[J]. 中学数学教学参考(高中), 2008(12): 8.

(上接第2-23页)

$\lg\frac{(n+2)(n+1)}{6}$, 所以 $a_{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, $a_n=\frac{n(n+1)}{2}\,(n\geqslant 2)$, $a_1=1$ 也适合此式, 故 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}\,(n\geqslant 1)$. 不难求得 $b_n=(n+1)^2$.

注: 取对数之后, 再用差分法, 是差分思想的变式运用.

知识是凝固的, 思想方法是活的. 高考试题体现了凝固知识中所内蕴的思想方法, 研究高考试题有助于我们从思想方法的高度灵活掌握教材内容.

横看成岭侧成峰

430079 湖北省武汉市华中师范大学国家数字化学习工程技术研究中心 彭翕成

东坡诗云: 横看成岭侧成峰, 远近高低各不同. 同一个事物, 从不同角度看, 所得到的是不一样的. 多角度的观察和分析, 会将事物看得更全面, 了解更细致. 每当看到此句时, 笔者都会想起阿贝尔定理.

阿贝尔是挪威数学家. 他是个天才, 虽然只活了27岁, 但对数学的贡献巨大, 将永垂史册. 他曾提出这样一个恒等式:

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n=a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(b_{n-1}-b_n)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n$.

当 $n=3$ (图1) 时, $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+(a_1+a_2+a_3)b_3$.

看似有点复杂, 但看明白之后, 其实很有意思, 不过就是从横纵两个角度看而已.

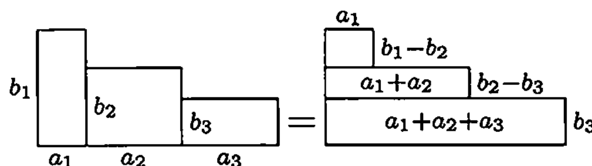


图 1

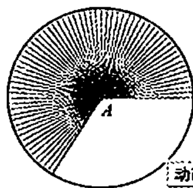
看似平常其实最奇崛. 仔细想来, 这种多个角度看问题的思想是如此地重要, 若不基于此, 很多方程都无法列出来. 单墫先生曾写过一本小册子《算两次》, 就是专门论述这一点的.

初等数学如此, 高等数学亦如是. 勒贝格积分和黎曼积分的主要区别, 就在于前者是对函数的值域进行划分, 后者是对函数定义域进行划分. 不就是从横纵两个角度看么? 勒贝格本人也对此有过比喻: 假如我欠人家一笔钱, 现在要还, 若按钞票面值的大小分类, 然后计算每一类的面额总值, 再相加, 这就是勒贝格积分思想; 如不按面额大小分类, 而是按从钱袋取出的先后次序来计算总数, 那就是黎曼积分思想.

下面笔者给出一些例子, 与大家分享.

案例1 圆的面积.

线动成面. 圆面的生成有多种方法, 可用一条半径旋转一周生成(图2), 那我们分解圆面积时可考虑将圆面分成很多小扇形. 如图3, 先将圆分成若干等份, 然后将圆弧展开, 接着将上边部分平移一个三角形的位置, 最后将上边部分插入到下边部分. 我们可以调整分解圆的份数, 容易看出, 分得越细, 最后得到的图形越接近于矩形, 其面积 $S=\dfrac{C}{2}\cdot r=\dfrac{2\pi r}{2}\cdot r=\pi r^2$.



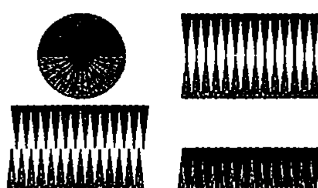


图 2 图 3

也可以认为圆面是由一个半径可变的圆运动生成(图4), 半径从0变大到 r, 那么圆面积可看作是这一族动圆周的集合. 如图5, 将这一族圆周展开成一个底为 $2\pi r$, 高为 r 的三角形, 因此 $S=\dfrac{1}{2}\cdot(2\pi r)\cdot r=\pi r^2$.

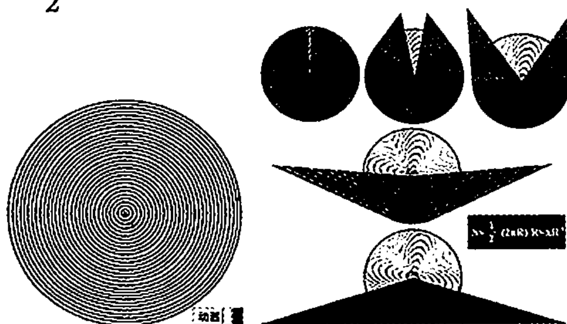


图 4 图 5

案例2 向量与方程.

笔者被问到这样的问题: 在大学时学习《高等代数》, 常常看到向量空间这样的名词, 却从未见书上画一条有大小、有方向的线段来表示向量, 到底中学学的向量和大学学的向量是不是一回事呢?

大学所学的向量是中学所学向量的进一步抽象. 有一些具体的例子可作为连接这两者之间的桥梁, 但国内所编写的教材很少有这样的例子, 国外的教材对此还是讲得比较清楚的. 下面这个案例出自麻省理工学院所用教材《线性代数引论》.

以方程组 $\begin{cases} 2x-y=0, \\ -x+2y=3 \end{cases}$ 来说, 可以用作图求解. 在图6中, 明显看出 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ 这样的数形结合, 不能说不对, 但确实眼界不高, 始终还把方程组看作是两个方程的简单组合, 没有把方程组看成是一个整体.

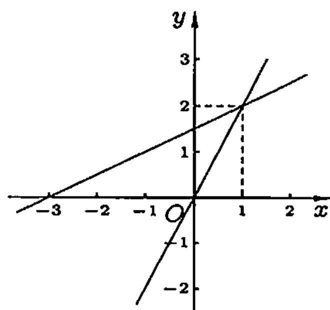


图 6

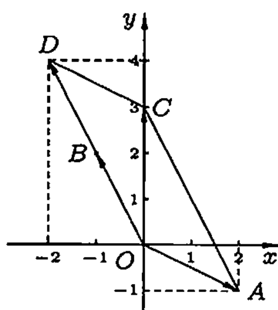


图 7

如果把方程组看作是一个整体 $Ax=b$, 不纠结于原来的两个方程. 换个角度, 不横着看, 而是竖着看, 则可以将方程组 $\begin{cases} 2x-y=0, \\ -x+2y=3 \end{cases}$ 看成是 $x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

如图7, 在坐标系中作出 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$, 很明显, $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.

到此, 终于将解线性方程和向量结合在一起了, 而且还是有大小、有方向的线段来表示向量!

高等数学是有难度的, 如果教材编写得太抽象, 读者学了之后也是云里雾里. 若读者总执着于初等数学的具体, 也很难理解得深刻. 这中间的度不好把握, 桥梁不好搭!

案例3 面积的割与补.

对于面积, 通常做法是倒序相加. 用图形表示就是先作图8, 再作一个完全一样的图形"扣"在上面(图9), 于是 $2S=(1+n)+(2+n-1)+\cdots+(n+1)=n(1+n)$, 即 $S=\dfrac{n(1+n)}{2}$.

这样的作图无疑是繁杂的, 完全可以简化. 在图9上加一条直线可得图10, 此时 $S=1+2+\cdots+n=\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

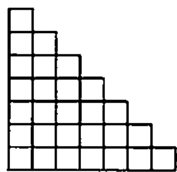


图 8

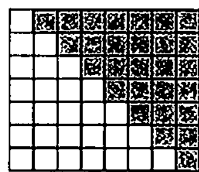


图 9

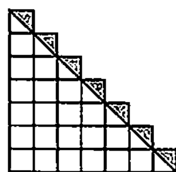


图 10

补, 需要另构新图; 而割, 只要在原图上小修即可. 只用割就能解决问题, 何必多此一举, 还要补呢?

图9和图10差别较大, 但若从计算公式分析, 则仅是系数作了一些分配、结合的小动作而已. $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 既可以重组为 $\dfrac{1}{2}[n(n+1)]$, 也可以重组为 $\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2}$, 这也许就是数学中的文字游戏, 但绝不可小瞧它. 与之类似的梯形的面积公式 $S=\dfrac{1}{2}(a+b)h=\dfrac{(a+b)h}{2}=\dfrac{1}{2}ah+\dfrac{1}{2}bh$, 如图11、图12.

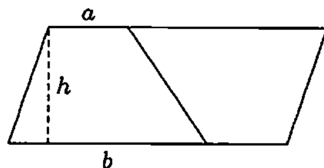


图 11

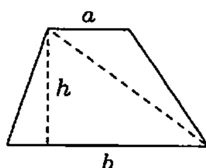


图 12

案例4 公式系数分配三例.

三角形面积公式、平方差公式、多边形内角和公式, 这三者好像是风马牛不相及, 但此处却合在一处了.

三角形面积公式有三种不同的表达方式: $S=\dfrac{1}{2}ah=a\left(\dfrac{1}{2}h\right)=\left(\dfrac{1}{2}a\right)h=\dfrac{1}{2}(ah)$, 与图13～图16一一对应, 其几何意义是显然的.

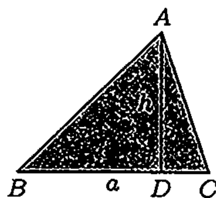


图 13

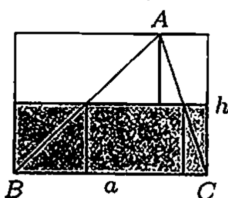


图 14

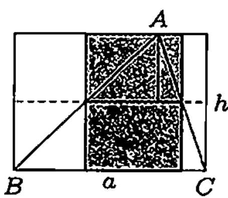


图 15

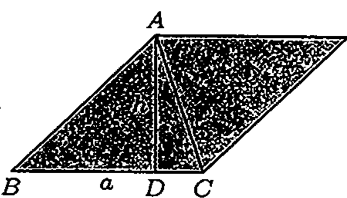


图 16

对一道西班牙数学奥林匹克试题的再研究

710061 陕西师范大学附属中学 程自顺

在八年级数学兴趣小组活动中遇到这样一个问题:

已知a、b是实数, 且$(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$, 问$a$、$b$之间有怎样的关系? 请推导(文[1]).

经查阅资料得知其为第31届西班牙数学奥林匹克竞赛的一道试题, 相关研究已发表于不同时期的各种刊物(文[2]至[6]), 本文从数与形的角度来进行探讨, 以丰盈此题的研究, 与大家共享!

这是个没有明确结论的一般性问题, 在解题伊始就面临着未知解题目标的困难, 即"将得到什么"和"从何处下手"的双重挑战. 已知的是涉及两个字母的等式, 我们可以先特殊化得到结论, 再借机寻找一般思路.

1. 特殊到一般的推进

1.1 特殊化探路

令$a=0$, 则$\sqrt{1+b^2}+b=1$, 有$\sqrt{1+b^2}=1-b$, 平方后整理得$b=0$.

这个值取得非常特殊, 以致仍然无法确定a、b之间有怎样的关系, 但有价值的是上述过程暗示我们在寻找a、b之间的关系时所用的核心变形——将含a、b的式子放在等式的两边, 将b移项并进行平方.

平方差公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$=\left[\frac{1}{2}(a+b)(a-b)\right]\cdot 2$$

$$=4\cdot\frac{(a+b)}{2}\frac{(a-b)}{2},$$

与图17~图20一一对应, 其几何意义是显然的.

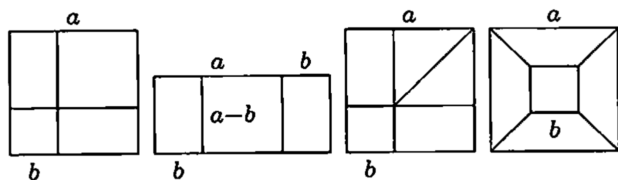


图 17　图 18　图 19　图 20

多边形内角和公式$(n-2)\cdot 180^\circ=n\cdot 180^\circ-360^\circ=(n-1)\cdot 180^\circ-180^\circ$, 与图21~图23一一对应, 其几何意义是显然的.

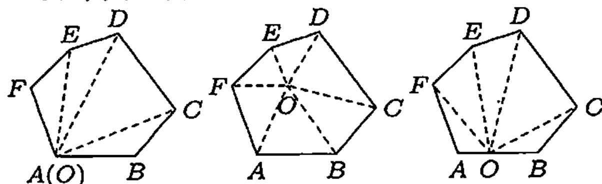


图 21　图 22　图 23

系数的分配与结合, 不仅仅用于数学公式, 解题时也大有用处. 下面只举一例, 更多案例参看笔者与张景中先生合著的《仁者无敌面积法》一书.

案例5　如图24, 已知正方形边长为a, 求阴影部分面积.

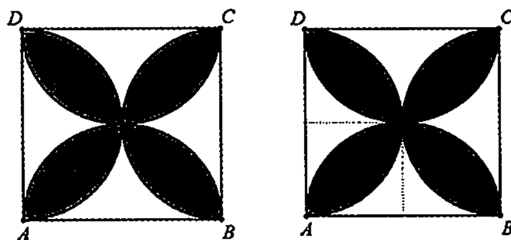


图 24　图 25

解: 考虑到阴影部分不是常规图形, 我们将其8等分(图25), 所得图形可看作是扇形和三角形之差:

$$S=8\left[\frac{1}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

如果将8这个系数乘到括号里去, 得$S=2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2-a^2=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 看似简单的操作, 却给我们一个新的视角: 两个以a为直径的圆减去正方形$ABCD$, 即为阴影部分.

令$a=1$, 则$(\sqrt{1+1^2}+1)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$, 有$\sqrt{1+b^2}+b=\dfrac{1}{\sqrt{1+1^2}+1}=\sqrt{1+1^2}-1$, 进而$\sqrt{1+b^2}=(\sqrt{1+1^2}-1)-b$,

平方整理得$b=-1$, 即$b=-a$, 由此可猜想a、b之间的关系是$a+b=0$.

分析这个过程, 显然有三个关键步骤:

(1) 由于a取特殊值, 使得$(\sqrt{1+b^2}+b)$前面的因式成为常系数, 所以自然将它除到等式右边, 即得到$\sqrt{1+b^2}+b=\dfrac{1}{\sqrt{1+1^2}+1}$;

(2) 因为等式右边的$\dfrac{1}{\sqrt{1+1^2}+1}$是常数, 所以容易想到分母有理化, 而为了凸显式子的本质, 在变形过程中并没有对根号内部的式子进行运算, 即得到$\sqrt{1+b^2}+b=\sqrt{1+1^2}-1$;

(3) 考虑等号左边根号内有b^2而根号外是b, 所以将b从等式左边移到右边, 两边平方后消掉b^2, 进而得到b的值, 也容易看出来它恰好是a的相反数.

另外考虑原等式中a、b的对称性, 显然, 当$a=-1$时, 同理可得$b=1$, 即$b=-a$, 这也进一步验证了猜想的正确性, 坚定了结论就是$a+b=0$的信心.

显然, 这一步非常重要, 不仅在于有效地进行了猜想即得到了结论, 更在于它的每一步都可以反过来将a从特殊推到一般, 进而得到原问题的一般解答过程.

1.2 *一般的解法*

易知$\sqrt{1+a^2}+a\neq 0$, 由已知得$\sqrt{1+b^2}+b=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}=\sqrt{1+a^2}-a$, 从而$\sqrt{1+b^2}=(\sqrt{1+a^2}-a)-b$, 平方整理得$b=-a$, 即$a+b=0$.

回顾上述思考及解答过程, 这道叙述简洁、形式新颖、结构优美的竞赛题所涉及的知识是简单的, 所使用的技巧(分母有理化, 平方)是平常的, 而在特殊与一般思想的统领下, 解决问题的方法是容易理解的, 解题过程也是很清晰的! 这一方面可以体会特殊与一般思想在数学解题中的实践过程(如何由特殊到一般), 一方面也能感悟到特殊与一般数学思想在数学解题中高屋建瓴的重要作用!

这是一个表面看起来纯粹的代数问题, 它有直观的几何背景吗? 换言之, 能从数形结合的角度来进行探索吗?

2. 数与形的相互印证

2.1 *初步印证*

在本题的众多解法外, 有一种构造函数的方法, 略述如下:

由$(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b)=1$, 两边同时乘以$(\sqrt{1+a^2}-a)$有

$\sqrt{1+b^2}+b=\sqrt{1+a^2}-a$, 即$\sqrt{1+b^2}+b=\sqrt{1+(-a)^2}+(-a)$.

从而构造函数$f(x)=\sqrt{1+x^2}+x$, 由于它是定义域上的单调函数, 由已知$f(b)=f(-a)$, 得$b=-a$, 即$a+b=0$.

这种方法主要是对已知进行变形, 再构造函数, 并利用其单调性来进行求解, 基本上与函数图像没有直接关系, 更无从谈起数形结合思想. 但受此启发, 结合已知的特点——等式左边两个括号内式子结构的相似, 促使我们尝试从另一个角度来构造函数, 也为数形结合提供了可能.

令$x=\sqrt{1+y^2}+y$, 整理得

$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$.

设$a=y_1$, $b=y_2$, 对应的自变量分别为x_1、x_2, 则原题可以转化为"已知$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$, 当$x_1x_2=1$时, y_1与y_2有什么关系?

如图1, 画出$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$, 当$x_1x_2=1$时, 可以看到$y_1+y_2=0$. 题目实际反映了$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$的一个性质: 自变量互为倒数时, 函数值互为相反数.

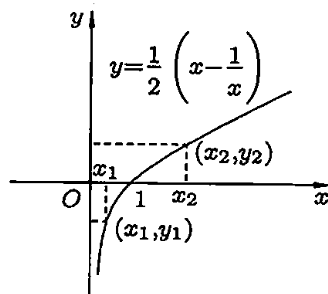


图 1

当然, 此时也可以从解析式的角度来进行推导: 由$x_1x_2=1$, 得$x_2=\dfrac{1}{x_1}$, $x_1=\dfrac{1}{x_2}$, 所以

$$y_1+y_2=\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)+\frac{1}{2}\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)$$

$= \frac{1}{2}[(x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)] = 0$.

构造函数$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$后, 画出其图像, 然后观察出结论, 再借助解析式进行推导, 已有数形结合的味道, 但还不够浓烈.

如何在坐标系中体现$x_1x_2 = 1$这个条件? 本题有更加直观的几何背景吗?

2.2 深入分析

如图2, 在同一坐标系中画出$y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ $(x > 0)$,

由$x_1x_2 = 1$, 得$x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_1 = \frac{1}{x_2}$.

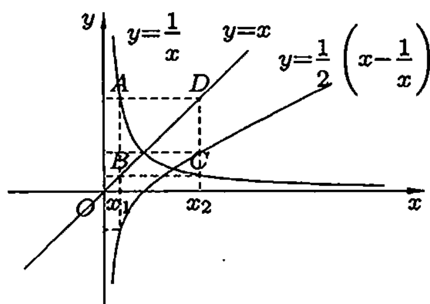


图 2

显然, 四边形$ABCD$是正方形,

所以$AB = CD$.

而$y_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = -\frac{1}{2}AB$,

$y_2 = \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) = \frac{1}{2}CD$,

所以$y_1 + y_2 = -\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}CD$

$= -\frac{1}{2}(AB - CD) = 0$.

如此, 不仅找到了原题的几何背景, 还能得到一个全新的代数解法.

2.3 新的代数解法

$\because$ $(\sqrt{1+a^2}+a)(\sqrt{1+b^2}+b) = 1$,

$\therefore a+b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+a^2}+a-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}+a}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+b^2}+b-\frac{1}{\sqrt{1+b^2}+b}\right)$

$= \frac{1}{2}[\sqrt{1+a^2}+a-(\sqrt{1+b^2}+b)]$

$+\frac{1}{2}[\sqrt{1+b^2}+b-(\sqrt{1+a^2}+a)] = 0$.

回顾上述数形结合的过程, 从挑战一般的构造函数解法开始, 到力寻这个代数问题的几何背景, 从仍依赖解析式的初步印证到深入分析后的直接看图, 体现了思维的深刻和精细, 而最后得到的新代数解法, 更是体现了数形结合的双向流通性!

3. 相关竞赛题的赏析

其实, 在各级竞赛考试中大量存在以此题为背景的试题, 现选典型例题罗列如下, 与大家分享.

例1 (第17届江苏省竞赛试题) 已知 $(a+\sqrt{a^2+2002})(b+\sqrt{b^2+2002}) = 2002$, 则$a^2-3ab-4b^2-6a-6b+58 =$ ________.

例2 (2008年全国初中数学联赛题) 已知实数a、b满足$(a-\sqrt{a^2-2008})(b-\sqrt{b^2-2008}) = 2008$, 则$3a^2-2b^2+3a-3b-2007 = \cdots\cdots$ ( )

(A) -2008; (B) 2008;

(C) -1; (D) 1.

例1是将原题中的常数1变为2002, 而结论不变, 更一般的, 有:

结论1 若$(a+\sqrt{a^2+m})(b+\sqrt{b^2+m}) = m\,(m>0)$, 则$a+b=0$.

例2的已知"$(a-\sqrt{a^2-2008})(b-\sqrt{b^2-2008}) = 2008$"可以变形为:

$(a+\sqrt{a^2-2008})(b+\sqrt{b^2-2008}) = 2008$,

即将原题中的常数1变为-2008, 此时结论已变为$a-b=0$. 更一般地, 有:

结论2 若$(a+\sqrt{a^2-m})(b+\sqrt{b^2-m}) = m\,(m>0)$, 则$a-b=0\,(a^2=b^2=m)$.

需要特别说明的是:

(1) 利用本文中的代数解法, 均可以容易证明上述结论;

(2) 对于结论2, 其函数背景更为直接. 为和原题对照, 令$m=1$, 则条件变为

$(a+\sqrt{a^2-1})(b+\sqrt{b^2-1}) = 1$,

按照本文构造函数的方法, 设$x = y+\sqrt{y^2-1}$, 变形得$y = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, 它有个显然的性质:

自变量互为倒数时, 函数值相等. 即:

若$x_1x_2 = 1$, 即有$x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_1 = \frac{1}{x_2}$, 则 $y_1 = \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right) = y_2$.

还有一道跳跃性更大、比较深刻的变式题目, 它的解答要构造对偶式, 请读者自己思考:

变式——实验——探究

——利用几何画板探究椭圆性质的一个案例

201600 上海市松江二中 张忠旺

问题 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，点$A$、$B$是椭圆上关于长轴对称的两点，点$P$是椭圆上的任意一点，直线$PA$、$PB$分别与$x$轴交于点$M$、$N$，则$x_M\cdot x_N=a^2$. 这是2010学年第一学期徐汇区高三年级诊断试题.

信息技术的使用为我们更深入探究数学问题提供了可能，本文利用几何画板对该问题进行变式、实验、探究.

实验1 将图1补形变成更完美的图形. 连结AN交椭圆于点Q，则点Q与点P关于x轴对称. 连结BQ，则BQ也过点M. 用几何画板实验发现，当弦AQ、BP保持对称绕着点N转动时，AP和BQ的交点总为定点M.

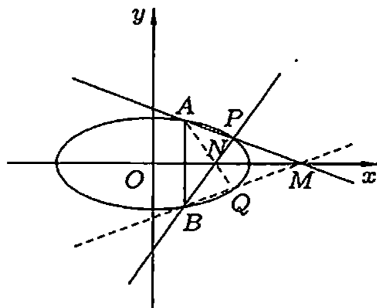


图1

于是有

结论1 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$，$AB$和$CD$是椭圆的过定点$N(t,0)\,(0<|t|<a)$且关于$x$轴对称的两条弦，则直线$AC$和$BD$的交点为定点$\left(\frac{a^2}{t},0\right)$.

特别地，当定点N变为椭圆的焦点$F(c,0)$时，直线AC和BD的交点为定点$M\left(\frac{a^2}{c},0\right)$.

实验2 将问题一般化. 当弦AB、CD为过定点$N(t,0)$的任意两条弦时，AC和BD的交点如何变化呢? 如图2，用几何画板实验，发现AC和BD的交点在过点M与x轴垂直的直线上.

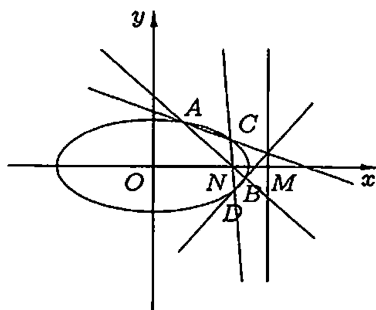


图2

结论2 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$,

例3 (2008年江西省竞赛试题) 已知
$(a+\sqrt{a^2+1})(b+\sqrt{b^2+4})=9$，
求$a\sqrt{b^2+4}+b\sqrt{a^2+1}$的值.

注: 为了与原题保持一致和便于叙述，以上题目均作了$x=a$，$y=b$的字母替换.

参考文献

[1] 黄东坡. 数学培优竞赛新方案(八年级)[M]. 武汉: 湖北人民出版社, 2009.

[2] 何淑平. 31届西班牙数学奥林匹克竞赛试题及其解答[J]. 数学通讯, 2001 (3): 47-48.

[3] 钟赣平. 利用函数性质简证一道竞赛题[J]. 中学数学月刊, 2003 (3): 38.

[4] 胡斌. 对一道西班牙赛题的再研究[J]. 中学数学月刊, 2003 (12): 24.

[5] 安振平. 一道西班牙数学竞赛题的探究[J]. 中学生数学, 2008 (8): 26.

[6] 张国治. 西班牙数学竞赛一题推广的另证[J]. 中学生数学, 2009 (3): 26.

AB、CD是过定点$N(t,0)$ $(0<|t|<a)$的两条弦，则直线AC、BD的交点在直线$x=\frac{a^2}{t}$上.

结论2是结论1的推广，由于结论2涉及的变量太多，直接证明比较复杂，下面我们将椭圆上的点用参数表示，利用三角变换给出结论2的证明.

证明：设$A(a\cos\theta_1,b\sin\theta_1)$、$B(a\cos\theta_2,b\sin\theta_2)$、$C(a\cos\theta_3,b\sin\theta_3)$、$D(a\cos\theta_4,b\sin\theta_4)$.

由A、N、B共线得

$$\frac{b\sin\theta_1}{a\cos\theta_1-t}=\frac{b\sin\theta_2}{a\cos\theta_2-t},$$

化简整理得

$$\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\frac{a}{t}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}. \quad\cdots\cdots ①$$

同理，由C、N、D共线得

$$\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}=\frac{a}{t}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}. \quad\cdots\cdots ②$$

直线AC：$bx\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}+ay\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}=ab\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}$,

直线BD：$bx\cos\frac{\theta_2+\theta_4}{2}+ay\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2}=ab\cos\frac{\theta_4-\theta_2}{2}$.

两条直线交点的横坐标为

$$x=\frac{\begin{vmatrix}ab\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2} & a\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\\ ab\cos\frac{\theta_4-\theta_2}{2} & a\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}b\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2} & a\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\\ b\cos\frac{\theta_2+\theta_4}{2} & a\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2}\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{a\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}-a\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_2+\theta_4-\theta_1-\theta_3}{2}}. \quad\cdots\cdots ③$$

$$\sin\frac{\theta_2+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_4+\theta_3-\theta_1}{2}+\sin\frac{\theta_2+\theta_4+\theta_1-\theta_3}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_3+\theta_4-\theta_2}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_3+\theta_2-\theta_4}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_4+\theta_3-\theta_1}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_3+\theta_4-\theta_2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\theta_2+\theta_4+\theta_1-\theta_3}{2}-\sin\frac{\theta_1+\theta_3+\theta_2-\theta_4}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}+\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_3}{2}$$

$$=\frac{a}{t}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}+\frac{a}{t}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_4-\theta_3}{2}$$

$$=\frac{a}{t}\sin\frac{\theta_2+\theta_4-\theta_1-\theta_3}{2}, \text{(根据①、②)}.$$

将上式代入③式得$x=\frac{a^2}{t}$，结论得证.

特别地，在结论2中，当定点N变为椭圆的焦点F时，我们有

结论2.1　已知AB、CD是过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的焦点$F(c,0)$的两条弦，则直线AC、BD的交点在准线$x=\frac{a^2}{c}$上.

当其中的一条弦变为椭圆的长轴时，我们有

结论2.2　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左、右顶点分别为A、B，CD是椭圆过定点$N(t,0)$ $(0<|t|<a)$一条弦，则直线AC、BD的交点在直线$x=\frac{a^2}{t}$上.

当点A、C和B、D分别重合时，AC、BD变为椭圆的切线，于是有

结论2.3　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，AB是椭圆过定点$N(t,0)$ $(0<|t|<a)$的一条弦，则过A、B的两条切线的交点在直线$x=\frac{a^2}{t}$上.

用几何画板容易验证结论2的逆命题也是成立的.

结论3　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$，过直线$x=\frac{a^2}{t}$ $(0<|t|<0)$上的点P的两条直线分别与椭圆交于A、B和C、D. 则弦AD、BC都过定点$N(t,0)$.

由结论3知，结论2.1、2.2、2.3的逆命题也是正确的，读者可自己写出.

设弦AB、CD为过定点$N(t,0)$的任意两条弦，直线AC和BD的交点G在直线$x=\frac{a^2}{t}$上，同样直线AD和CB的交点H也在直线$x=\frac{a^2}{t}$

上, 我们探究与线段GH有关的不变性质.

为了便于观察, 我们先从N为焦点的特殊情形开始.

实验3 如图3, 过焦点$F(c,0)$作两条弦AB、CD, 直线AC与BD的交点为G, 直线AD和BC的交点为H, 当弦绕着点F转动时, 发现$\angle GFH=90^\circ$, 且$y_G\cdot y_H$为定值.

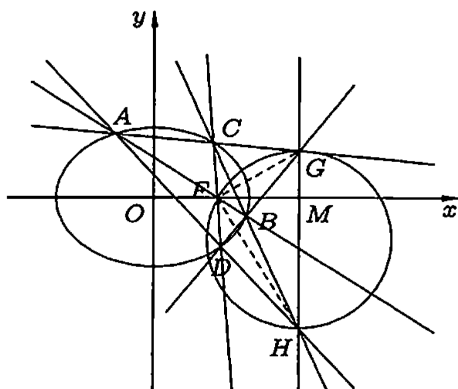


图3

于是有

结论4 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, AB、CD是过焦点$F(c,0)$的两条弦, 则直线AC、BD的交点G和直线AD、CB的交点H都在准线$x=\dfrac{a^2}{c}$上, 且$\angle GFH=90^\circ$, $y_G\cdot y_H=-\dfrac{b^4}{c^2}$.

我们结合图3, 将结论4中的条件简化, 得到

结论5 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, AB是过焦点$F(c,0)$的一条弦, C是椭圆上的一点, 直线CA、CB分别与准线$x=\dfrac{a^2}{c}$交于点G、H, 则$\angle GFH=90^\circ$, 且$y_G\cdot y_H=-\dfrac{b^4}{c^2}$.

实验4 如图4, 过定点$N(t,0)$的弦AB、CD, 直线AC与BD的交点为G, 直线AD和BC的交点为H, 当弦绕着点N转动时, 观察发现$\angle GNH$随弦的转动而变化, 但$y_G\cdot y_H$为定值. 那么在x轴上是否存在其他的定点N', 使得$\angle GN'H=90^\circ$呢? 实验发现以GH为直径的圆与x轴的交点不变.

我们结合图4, 将条件简化得

结论6 已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$, AB是过定点$N(t,0)$ $(0<|t|<a)$的一条弦, C

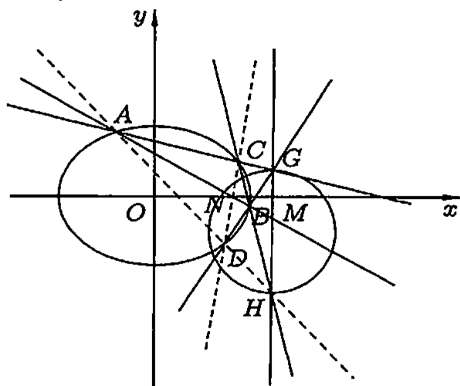


图4

是椭圆上的一点, 直线CA、CB分别与直线$x=\dfrac{a^2}{t}$交于点G、H, 则$y_G\cdot y_H=-\dfrac{b^2(a^2-t^2)}{t^2}$, 且以$GH$为直径的圆过定点$\left(\dfrac{a^2}{t}\pm\dfrac{b\sqrt{a^2-t^2}}{t},0\right)$.

证明: 由结论2的证明中AC的方程可得AC与$x=\dfrac{a^2}{t}$交点G的纵坐标为

$$y_G=\frac{b\cos\dfrac{\theta_3-\theta_1}{2}-\dfrac{ab}{t}\cos\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}},$$

AD的方程为

$$bx\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}+ay\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}=ab\cos\frac{\theta_4-\theta_1}{2},$$

AD与$x=\dfrac{a^2}{t}$交点H的纵坐标为

$$y_H=\frac{b\cos\dfrac{\theta_4-\theta_1}{2}-\dfrac{ab}{t}\cos\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}},$$

$$y_G\cdot y_H$$

$$=\frac{b^2}{t^2}\cdot\frac{t\cos\dfrac{\theta_3-\theta_1}{2}-a\cos\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}}\cdot\frac{t\cos\dfrac{\theta_4-\theta_1}{2}-a\cos\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}}$$

$$=\frac{b^2}{t^2}\left[\frac{t^2\cos\dfrac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\dfrac{\theta_4-\theta_1}{2}}{\sin\dfrac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}}\right.$$

$$+\frac{a^2\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}\Bigg]$$

$$-\frac{b^2}{t^2}\left[\frac{at\cdot\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_4+\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}-\frac{at\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}\right].$$

$$\because\ \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_4+\theta_1}{2}+\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}+\cos\frac{\theta_3-2\theta_1-\theta_4}{2}+\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}+\cos\frac{2\theta_1+\theta_3-\theta_4}{2}\right]$$

$$=\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}+\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\cos\theta_1$$

$$=\frac{a}{t}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}+\frac{t}{a}\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\theta_1,\ (\text{根据②}).$$

$\therefore\ y_G\cdot y_H$

$$=\frac{b^2}{t^2}\left[\frac{t^2\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_1}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}+\frac{a^2\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}\right]$$

$$-\frac{b^2}{t^2}\frac{a^2\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}+t^2\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\theta_1}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}$$

$$=\frac{b^2\cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_1}{2}-b^2\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\theta_1}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}$$

$$+\frac{a^2b^2}{t^2}\frac{\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}-\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}}{\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2}}.\ ④$$

$$\because\ \cos\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_4-\theta_1}{2}-\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\theta_1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_3+\theta_4-2\theta_1}{2}+\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_3+\theta_4+2\theta_1}{2}+\cos\frac{\theta_3+\theta_4-2\theta_1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}-\cos\frac{\theta_3+\theta_4+2\theta_1}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2},$$

$$\cos\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}-\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\theta_1+\theta_3+\theta_4}{2}+\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\right]-\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{2\theta_1+\theta_3+\theta_4}{2}-\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\right]$$

$$=-\sin\frac{\theta_1+\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_4}{2},$$

将以上两式代入④式

得$y_G\cdot y_H=-\dfrac{b^2(a^2-t^2)}{t^2}$为常数.

设以线段GH为直径的圆与x轴相交于点$(x,0)$, 因为$GH\perp x$轴, 由相交弦定理得,

$$\left(x-\frac{a^2}{t}\right)^2=|y_G\cdot y_H|=\frac{b^2(a^2-t^2)}{t^2},$$

$$\therefore\ x=\frac{a^2}{t}\pm\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{t},$$

故定点坐标为$\left(\dfrac{a^2}{t}\pm\dfrac{b\sqrt{a^2-t^2}}{t},0\right)$.

证毕.

以上结论都可以推广到双曲线和抛物线的情形, 限于篇幅, 我们只给出结论6的相关结论.

结论7 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$, AB是过定点$N(t,0)\,(|t|>a)$的一条弦, C是双曲线上的一点, 直线CA、CB与直线$x=\dfrac{a^2}{t}$的交点为G、H, 则$y_G\cdot y_H=-\dfrac{b^2(t^2-a^2)}{t^2}$, 且以$GH$为直径的圆过定点$\left(\dfrac{a^2}{t}\pm\dfrac{b\sqrt{t^2-a^2}}{t},0\right)$.

结论8 已知抛物线$y^2=2px\,(p>0)$, AB是过定点$N(t,0)\,(t>0)$的一条弦, C是抛物线上的一点, 直线CA、CB与直线$x=-t$的交点为G、H, 则$y_G\cdot y_H=-2pt$, 且以GH为直径的圆过定点$(-t\pm\sqrt{2pt},0)$.

利用本文的变式结论我们可以编制有关的数学试题, 现举两例:

(下转封底)

差分思想在数列中的应用

430079 华中师范大学教育信息技术工程研究中心 徐章韬

数列是函数的离散形式; 差分是微分的离散形式. 一阶差分就是离散函数中连续相邻两项之差. 如有离散函数$x(k)$, 则$y(k)=x(k+1)-x(k)$就是此函数的一阶差分; $y(k)$的一阶差分$z(k)=y(k+1)-y(k)=(x(k+2)-x(k+1))-(x(k+1)-x(k))$, 就是$x(k)$的二阶差分. 随着《数列与差分》作为选修内容进入广大师生的视野, 高考试题虽未明显地考到有关差分的试题, 但是差分方法中所蕴含的思想方法还是考查到了.

1. 教材寻根

等差数列$\{a_n\}$, 由于$a_{n+1}-a_n=d$, 故等差数列是一阶差分为常数的数列. 由于等差数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{d}{2}n^2+n\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$是关于$n$的二次式, 故用$S_n-S_{n-1}=a_n\,(n\geqslant 2)$求数列$\{a_n\}$的通项时, 要用到二阶差分的思想, 即连续二次作差.

2. 典型例题

2.1 一阶差分思想的应用

例1 (2004年全国高考卷I压轴题) 已知数列$\{a_n\}$中$a_1=1$, 且$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$, $a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$, 其中$k=1,2,3,\cdots\cdots$.

(I) 求a_3, a_5;

(II) 求$\{a_n\}$的通项公式.

解: 不难求得$a_3=3$, $a_5=13$.

(II) 由$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$, $a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$, 有$a_{2k+1}-a_{2k-1}=3^k+(-1)^k$,

则$\sum\limits_{k=1}^{n}(a_{2k+1}-a_{2k-1})=\sum\limits_{k=1}^{n}(3^k+(-1)^k)$, 由此得$a_{2n+1}-a_1=\frac{3}{2}(3^n-1)+\frac{(-1)^n-1}{2}$,

于是$a_{2n+1}=\frac{3^{n+1}}{2}+\frac{(-1)^n}{2}-1$. 由已知, 有$a_{2n}=\frac{3^n}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{2}-1+(-1)^n=\frac{3^n}{2}+\frac{(-1)^n}{2}-1$.

$$\text{所以}a_n=\begin{cases}\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{2}+\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2}-1, & n\text{为奇数}\\ \frac{3^{\frac{n}{2}}}{2}+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}-1, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

注: 这里是差分方法的变用. 用相邻两项作差, 使之便于求和.

例2 (2005年全国高考江西文科卷压轴题) 已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n-S_{n-2}=3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\,(n\geqslant 3)$, 且$S_1=1$, $S_2=-\frac{3}{2}$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解: 先考虑偶数项,

有$S_{2n}-S_{2n-2}=3\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$,

则$\sum\limits_{k=2}^{n}(S_{2k}-S_{2k-2})=3\sum\limits_{k=2}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$,

所以$S_{2n}=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\quad(n\geqslant 1)$.

考虑奇数项, 有$S_{2n+1}-S_{2n-1}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$,

则$\sum\limits_{k=1}^{n}(S_{2k+1}-S_{2k-1})=3\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$, 化简得$S_{2n+1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\quad(n\geqslant 1)$. 故

$$\begin{aligned}a_{2n}&=S_{2n}-S_{2n-1}\\&=-4+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\quad(n\geqslant 1),\\a_{2n+1}&=S_{2n+1}-S_{2n}\\&=4-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\quad(n\geqslant 1),\end{aligned}$$

$a_1=S_1=1$.

$$\text{所以}a_n=\begin{cases}4-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n\text{为奇数},\\ -4+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, n\text{为偶数}.\end{cases}$$

注: 这里是差分方法的变用. 用相间的两项作差, 使之便于求和.

2.2 二阶差分思想的应用

例 3 (1994 年全国高考试题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ $(n\geqslant 1)$, 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

证明: 由 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 有

$2S_n=n(a_1+a_n)$. ······························ ①

由 ① 式有 $2S_{n+1}=(n+1)(a_1+a_{n+1})$.··· ②

② 式减去 ① 式得

$2(S_{n+1}-S_n)=a_1+(n+1)a_{n+1}-na_n$,

化简得 $na_n=a_1+(n-1)a_{n+1}$. ·········· ③

由 ③ 式得 $(n+1)a_{n+1}=a_1+na_{n+2}$. ····· ④

由 ④ 式减去 ③ 式有 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$, 故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

例4 (2006年全国高考福建文科卷压轴题) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}\cdot\dots\cdot4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$, 证明 $\{b_n\}$ 是等差数列.

证明: (1) 由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$, 即有 $(a_{n+2}-a_{n+1})=2(a_{n+1}-a_n)$, 故数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是等比数列.

(2) 不难求得 $a_n=2^n-1$.

(3) 将 $4^{b_1-1}4^{b_2-1}\dots4^{b_n-1}=(a_n+1)^{b_n}$ 化简得 $2[(b_1+b_2+\cdots+b_n)-n]=nb_n$. ······ ①

由 ① 式可得 $2[(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})-(n+1)]=(n+1)b_{n+1}$, ···························· ②

① 式减去 ② 式得 $(n-1)b_{n+1}-nb_n+2=0$,··· ③

由 ③ 式可得 $nb_{n+2}-(n+1)b_{n+1}+2=0$,··· ④

④ 式减去 ③ 式得 $b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$. 故 $\{b_n\}$ 是等差数列.

例5 (2005年全国高考江苏卷压轴题) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, 已知 $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=11$, 且 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=An+B$ $(n\geqslant 1)$, 其中 A、B 为常数.

(1) 求 A、B 的值;

(2) 证明数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

证明: 不难求得 $A=-20$, $B=-8$. 由已知得 $(5n-8)S_{n+1}-(5n+2)S_n=-20n-8$. ·· ①

由 ① 式可得 $(5n-3)S_{n+2}-(5n+7)S_{n+1}=-20n-28$, ··· ②

② 式减去 ① 式, 得 $(5n-3)S_{n+2}-(10n-1)S_{n+1}+(5n+2)S_n=-20$, ························ ③

由 ③ 式可得到 $(5n+2)S_{n+3}-(10n+9)S_{n+2}+(5n+7)S_{n+1}=-20$, ····························· ④

④ 式减去 ③ 式, 得 $(5n+2)S_{n+3}-(15n+6)S_{n+2}+(15n+6)S_{n+1}-(5n+2)S_n=0$, 即 $S_{n+3}-3S_{n+2}+3S_{n+1}-S_n=0$. 又 $S_{n+3}=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$, $S_{n+2}=S_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$, 化简有 $a_{n+3}-2a_{n+2}+a_{n+1}=0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

例6 (2007年全国高考湖南卷试题) 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=a$, 且 $S_n^2=3n^2a_n+S_{n-1}^2$, $a_n\neq 0$. $n=2,3,4,\cdots$. 证明: 数列 $\{a_{n+2}-a_n\}$ 是常数数列.

证明: 当 $n\geqslant 2$ 时, 由已知有 $S_n^2-S_{n-1}^2=3n^2a_n$, 因为 $a_n=S_n-S_{n-1}\neq 0$, 所以 $S_n+S_{n-1}=3n^2$, ·· ①

由 ① 式有 $S_{n+1}+S_n=3(n+1)^2$, ········ ②

由 ② 式减去 ① 式有 $a_{n+1}+a_n=6n+3$, ·· ③

由 ③ 式有 $a_{n+2}+a_{n+1}=6n+9$, ········ ④

④ 式减去 ③ 式有 $a_{n+2}-a_n=6$, 即 $\{a_{n+2}-a_n\}$ 是常数数列.

注: 以上几题所用的方法是一样的.

例7 (2008年全国高考天津卷压轴题) 在数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 中, $a_1=1$, $b_1=4$, 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且满足 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$, $2a_{n+1}$ 为 b_n 与 b_{n+1} 的等比中项, $n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求 a_2, b_2 的值;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解: (1) 不难求得 $a_2=3$, $b_2=9$.

(2) 由 $nS_{n+1}-(n+3)S_n=0$, ············· ①

有 $(n-1)S_n-(n+2)S_{n-1}=0$, ········· ②

① 式减去 ② 式得 $na_{n+1}=(n+2)a_n$ $(n\geqslant 2)$. 即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+2}{n}$, 对此式两边取常用对数得 $\lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg(n+2)-\lg n$ $(n\geqslant 2)$, 求累加和得 $\sum\limits_{k=2}^{n}(\lg a_{k+1}-\lg a_k)=\sum\limits_{k=2}^{n}\{[\lg(k+2)+\lg(k+1)]-[\lg(k+1)+\lg k]\}$, 即 $\lg a_{n+1}-\lg a_2=$

(下转第2-12页)

题根，让你事半功倍学数学

——读《高中数学题根》有感

200093 上海理工大学附中 张丽华

初识《高中数学题根》(黄坪、尹德好编著，华东师范大学出版社，2011年3月第一版)这本书，很是被这本书的书名和封面所吸引，封面上是一棵大树从根部到树干，再到树枝树杈. 只听说过英语单词的词根，有了词根，便可以根据词根，轻轻松松地记住一串单词，减轻繁重的记忆劳动. 没想到数学也能找到题根，理清顺序，逐步升华，这不是帮那些在题海里挣扎的学生找到了一根救命的稻草吗？

读完此书，有一种"一览众山小"的感觉，和之前读过的什么"练"，什么"库"的教辅书很不一样，这本书帮我们步入了事半功倍的快车道.

我们从书中选取这样一个例子(见本书第2-5页)：题根2：同时满足：(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，(2)若 $a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 的个数是________.

【题根分析】

由"规则"：若 $a\in M$，则 $6-a\in M$，可知 M 中的元素成组出现，而由元素的互异性，元素3单独成为一组，接下来对 M 中所含组的个数进行分类讨论即可.

解：若 M 中含有一组元素，则 $M=\{3\}$ 或 $M=\{1,5\}$ 或 $M=\{2,4\}$，有三种可能；

若 M 中含有两组元素，则 $M=\{1,3,5\}$ 或 $M=\{2,3,4\}$ 或 $M=\{1,2,4,5\}$，有三种可能；

若 M 中含有三组元素，则 $M=\{1,2,3,4,5\}$，有一种可能.

因此，符合条件的非空集合 M 有7个.

含 n 个元素的集合 $U=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的子集个数为 2^n，非空子集的个数为 2^n-1.

【变式网络】

题根2——对元素个数进行推广——变式1.

题根2——改变"规则"——变式2、3.

题根2——由单"规则"变为"多规则"——变式4、5.

【经典变式】

变式1：同时满足：(1) $M\subseteq\{1,2,\cdots,n-1\}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})\}$，(2)若 $a\in M$，则 $n-a\in M$ 的非空集合 M 的个数是________.

分析与解：为了对 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中的元素进行分组，需要对 n 的奇、偶进行讨论.

当 n 为偶数时，$\{1,2,\cdots,n-1\}$ 含有奇数个元素，故分为 $\frac{n}{2}$ 组，除元素 $\frac{n}{2}$ 单独作为一组外，其他每组有两个元素. 所以，符合条件的非空集合 M 的个数为 $2^{\frac{n}{2}}-1$.

当 n 为奇数时，$\{1,2,\cdots,n-1\}$ 含有偶数个元素，故分为 $\frac{n-1}{2}$ 组，每组有两个元素，符合条件的非空集合个数为 $2^{\frac{n-1}{2}}-1$.

变式2：设 M 为实数集且满足条件：若 $a\in M$，则 $\frac{1}{1-a}\in M$. 当 $-1\in M$ 时，最小集合 $M=$________.

解：由 $-1\in M\Longrightarrow\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in M$，

由 $\frac{1}{2}\in M\Longrightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in M$，

由 $2\in M\Longrightarrow\frac{1}{1-2}=-1\in M$.

由 M 中元素的互异性，得到 $M=\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}$.

变式3：设非空集合 M 中不含元素 -1, 0, 1，且满足条件：若 $a\in M$，则有 $\frac{1+a}{1-a}\in M$，证明：

(1)集合 M 中至多有四个元素；

(2)集合 M 中有且仅有四个元素.

提示：(1)集合 M 中至多是下列四个元素：$a,\frac{1+a}{1-a},-\frac{1}{a},\frac{a-1}{a+1}$.

(2) 证明$a, \frac{1+a}{1-a}, -\frac{1}{a}, \frac{a-1}{a+1}$四个元素两两不等即可, 考虑反证法.

变式4: (2008年全国高考福建卷) 设P是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意a、$b \in \mathbf{R}$, 都有$a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b} \in P$ (除数$b \neq 0$), 则称P是一个数域. 例如有理数集$\mathbf{Q}$是数域; 数集$F=\{a+b\sqrt{2}|a、b \in \mathbf{Q}\}$也是数域. 有下列命题:

① 整数集是数域;

② 若有理数集$\mathbf{Q} \subseteq M$, 则数集M必为数域;

③ 数域必为无限集;

④ 存在无穷多个数域.

其中正确的命题的序号是________ (把你认为正确的命题的序号都填上).

分析与解: 如果数集P对加、减、乘、除四则运算具有封闭性, 那么我们称这个数集为数域.

因为整数集对除法不封闭, 因此整数集不是数域, 所以 ① 是错误的. 对于 ②, 我们设$M=Q \cup \{\pi\}$, 则得到$1+\pi \notin M$, 所以 ② 也是错误的; ③ 是正确的. 证明如下:

设a、$b \in P$, 则$a \pm b \in P$, 得到$2a \in P$, 进而有$3a \in P$, $4a \in P$, $\cdots$, 所以数集P是无限集. ④ 已知$F=\{a+b\sqrt{2}|a、b \in \mathbf{Q}\}$是数域, 同理可证明$\{a+b\sqrt{3}|a、b \in \mathbf{Q}\}$, $\{a+b\sqrt{5}|a、b \in \mathbf{Q}\}$, $\cdots$, 都是数域, 概括得到当t为质数时, 集合$\{a+b\sqrt{t}|a、b \in \mathbf{Q}\}$均为数域.

综上得到正确命题的序号是 ③、④.

变式5: (2009年全国高考北京卷) 设A是整数集的一个非空子集, 对于$k \in A$, 如果$k-1 \notin A$且$k+1 \notin A$, 那么k是A的一个"孤立元", 给定$S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 由S的3个元素构成的所有集合中, 不含"孤立元"的集合共有____个.

分析与解: 对于$k \in A$, 当$k-1 \notin A$, $k+1 \notin A$同时满足时, 我们才称k是A的一个"孤立元", 否则就不是"孤立元".

如$\{1,2,3\}$是不含"孤立元"的一个集合, 而$\{1,2,4\}$就不是, 其中元素4是"孤立元", 不是满足题设的集合, 故所有满足题设的集合为$\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \cdots, \{6,7,8\}$, 共6个集合.

由S的3个元素构成的所有集合中, 这3个元素均为"孤立元"的集合有20个.

从这个例子, 可窥见此书特色之一斑:

一、螺旋上升的变式: 轻松理清基础与难题的关系

从题根到变式1, 集合中的元素由5个到n个, 帮助学生轻松跨越了由特殊到一般的这道鸿沟; 学生在有集合$M \subseteq \{1,2,3,\cdots,n-1\}$ $(n \geqslant 2, n \in \mathbf{N})$限定的情况下研究了"若$a \in M$", 则$n-a \in M$"的情况, 接着去掉集合中自然数的限定, 放宽为实数, 研究"若$a \in M$, 则$\frac{1}{1-a} \in M$", 学生会有一些茫然, 满足这样条件的集合中的元素会有多少个呢? 会不会无限进行下去呢? 规则发生了变化, 难度自然上了一个台阶, 但有了前面的铺垫, 学生还是可以尝试着研究的, 这也就到了变式2、3. 接着由"$a \in M$, 则$\frac{1}{1-a} \in M$"这样一个规则, 又变到"设P是一个数集, 若对任意a、$b \in \mathbf{R}$, 都有$a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b} \in P$"这样多个规则, 这本来是大学中较难懂的一个概念, 有了前面的铺垫就轻轻松松地引入到了高中, 难度再次升级, 最后到开放创新的2009年北京高考题的变式5.

由此例可见, 阅读此书, 犹如登山, 从山脚下开始, 也就是从书中的题根开始, 顺着变式, 一个台级一个台级地上来, 到惊讶自己怎么能解这样的难题时, 回首一望, 自己已快到山顶. 在变背景、变对象、变形式、变规则、变条件等的变式网络中, 一路风光旖旎, 令人心旷神怡.

感叹该书作者对学习的"潜在距离"怎么拿捏得这样准. 铺垫既没有呈现得太慢, 感觉不到学习的挑战性; 又没有跨度太大, 失脚走空的懊丧. 通过一系列"梯度合适"的"小变化"题目, 过渡到最终解决较难的新题目. 忽觉得数学是这样一门善变而又遵循一定规则, 既充满挑战又给人以成就感的学科. 识得了其"庐山真面目", 反觉得更亲切了.

二、新颖创新的变式: 为教学、命题提供新思路

如果仅仅将其作为一本教辅书使用的话, 就真是委屈了. 正如该书作者在前言中所说, "此书是在变式教学理论数十年研究的基础上而形成的". 记得在复旦高级教师研修班上, 听变式教学的倡导者顾泠沅老师讲"变式教学", 他说明了两种变式: 概念性变式和过程性变式, 并以勾股定理的证明很好地诠释了变式, 当时很是感慨在勾股定理证明的过程中其铺垫的精彩. 但也有一个

(下转第2-31页)

抓纲务本，促进数学理解
——例谈2011年上海数学高考试题和启示

201100 上海市闵行区教育学院 杨家政

中学数学教材是经过政府专业机构审定通行的学习蓝本，是经过长期实践经验积累而形成的教学材料. 怎样发挥好教材的作用，正确理解“不是教教材，而是用教材教”的观点仍然是目前值得重视和研究的课题. 本着有利于推进素质教育、有利于高校选拔新生的指导思想，2011年上海秋季高考数学试卷立足于试卷的科学性和严谨性，重视对中学数学的基础知识和基本技能的考查，重视通性通法，关注对数学的深入理解、数学思想方法和研究性学习能力的考查. 在如何重视教材、打好基础、灵活运用、提高能力等方面对中学数学教学有着积极的引导作用，给我们很多的启示.

一、用好教材、弄懂教材，牢固掌握数学的基础

试卷大部分试题是立足于基础知识和基本技能，直接来源于教材或改编于教材. 如理科第1、2、3、4、5、6、7、8、9、12、15、16、19等题，文科第1、2、3、4、5、6、8、9、10、13、15、16、17、19、20等题，都是和课本中的练习题相类似或者是将课本中的练习题稍加改编得到，以常见背景、简单问题、常规方法呈现，贴近大部分学生认知的实际情况. 在考查基本运算能力的同时注意考查基本的数学概念和数学定义的掌握.

如理科卷第3题：设m是常数，若点$F(0,5)$是双曲线$\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{9}=1$的一个焦点，则$m=$______. 而高中二年级第二学期课本P.57练习12.5第2题：如果双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{n}=1$的焦点在$x$轴上，且焦距为10，那么实数$n$的值为______.

理科卷第5题：在极坐标系中，直线$\rho(2\cos\theta+\sin\theta)=2$与直线$\rho\cos\theta=1$的夹角大小为______(结果用反三角函数值表示). 而高中三年级理科拓展练习部分P.12复习题第2(2)题：直线$l_1:\rho\cos(\theta-\alpha)=a$和直线$l_2:\rho\sin(\theta-\alpha)=a$的位置关系是______. 考题与课本上练习题相比较如出一辙.

第9题是直接从高三年级拓展Ⅱ理科课本P.75表6改编而来.

再如理科卷第12题：随机抽取的9个同学中，至少有2个同学在同一月份出生的概率为______(默认每个月的天数相同，结果精确到0.001). 这几乎是课本上的原题，只不过是将随机抽取的同学数目由10个改为9个而已. 正确答案是0.985，但有不少的考生答案离奇，如：0.480、0.005、0.001等等，不一而足，甚至还有答1.000、29.545的，一个随机事件的概率怎么会大于1呢? 这充分说明了考生完全不清楚随机事件概率的概念，课本上的例题没很好理解和掌握.

这次高考有三分之一的考题来源于课本上的例、习题，因此，2011年高考题启示我们要用好教材、弄懂教材，引导学生通过认真学习教材内容，有效落实基础知识和基本方法的理解与掌握. 重视对“本”的理解、领悟，重视中学数学教学的规范性，矫正由应试而产生的教学内容上的随意性，重视对教材和课程标准的深入分析和研究.

特别要重视用集合语言表达数学问题、解决数学问题. 体现了高考的考查目标——考生对“纲”和“本”的领悟与把握，旨在引导师生共同努力与高等数学紧密联系，用现代数学的集合语言表达数学问题.

二、注重理解数学概念的内涵，把握住数学的实质

数学概念是数学的灵魂，是人们进行数学思维和研究数学关系的基本单位. 如果对数学概念理解肤浅，内在逻辑混淆，那是学不好数学的. 只有准确而又深入地理解概念，把握数学概念的内

涵和本质, 找到知识的内在联系, 才能有效地分析问题并解决问题.

如理科卷第13题:

设 $g(x)$ 是定义在$\mathbf{R}$上、以1为周期的函数. 若函数 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域为______.

此题主要是考查函数的基本性质以及分析、运用、解决问题的能力. 因为 $g(x)$ 是定义在$\mathbf{R}$上的以1为周期的函数, 周期函数在其一个周期上是取遍整个函数的值域, 区间 $[3,4]$ 的长度恰为1, $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$, 亦即函数 $f(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的最小值为 -2, 最大值为5. 不妨设 x_1、$x_2\in[3,4]$, 且 $f(x_1)=-2$, $f(x_2)=5$, 即 $x_1+g(x_1)=-2$, $x_2+g(x_2)=5$, $f(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的最小值一定是在 $[-10,-9]$ 上取到, 最大值一定是在 $[9,10]$ 上取到, 亦即在 $-10+x_1-3$ 处取到最小值, 在 $9+x_2-3$ 处取到最大值, 且最小值为 $f(-10+x_1-3)=-10+x_1-3+g(-10+x_1-3)=-13+x_1+g(x_1)=-15$, 最大值为 $f(9+x_2-3)=9+x_2-3+g(9+x_2-3)=6+x_2+g(x_2)=11$, 所以当 $-10\leqslant x\leqslant 10$时, $-15\leqslant f(x)\leqslant 11$, 故所求的值域为 $[-15,11]$.

值得一提的是, 有考生误认为函数$g(x)$在区间$[3,4]$上也是单调递增的, 由 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[3,4]$ 上的值域为 $[-2,5]$, 得到 $g(x)$ 的值域为 $[-5,1]$, 这样 $f(x)=x+g(x)$ 在区间 $[-10,10]$ 上的值域就是 $[-15,11]$ 了. 错误的想法得到了正确的结论. 事实上, 由于 $g(x)$ 是周期为1的周期函数, 所以函数 $g(x)$ 在一个周期的闭区间上是单调递增这一假设是错误的, 与函数的周期性矛盾, 是概念混淆.

又如理科卷第14题:

已知点 $O(0,0)$、$Q_0(0,1)$ 和点 $R_0(3,1)$, 记 Q_0R_0 的中点为 P_1. 取 Q_0P_1 和 P_1R_0 中的一条, 记其端点为 Q_1、R_1, 使之满足 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$; 记 Q_1R_1 的中点为 P_2, 取 Q_1P_2 和 P_2R_1 中的一条, 记其端点为 Q_2、R_2, 使之满足 $(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$. 依次下去, 得到 P_1, P_2, $\cdots$, P_n, $\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=$______.

本题考查"二分法"和逼近、极限思想、数形结合思想以及分析问题、解决问题的能力.

在线段 Q_0R_0 上不断地二等分取中点, 得 $|Q_0R_0|=3$, $|Q_1R_1|=\dfrac{3}{2}$, $|Q_2R_2|=\dfrac{3}{2^2}$, $\cdots$, $|Q_nR_n|=\dfrac{3}{2^n}$, $\cdots$, 中点与端点形成的新的线段长度不断地缩小, $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_nR_n|=0$, 并且新线段两端点到原点距离是一个大于2, 一个小于2, 这件事情可以无限做下去, 所以只要在线段 Q_0R_0 上找到一点 P, 使 $|OP|=2$ 即可. 设点 P 在 x 轴上的投影为 R, 由于 $|PR|=1$, $|OP|=2$, 因此 $|OR|=\sqrt{3}$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=\sqrt{3}$.

不少考生缺乏对问题的深入分析和理解, 转化、化归的能力不强, 不能挖掘出不等式 $(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$ 的几何意义, 更缺乏透过现象看本质的本领, 无法将二分法的操作转化为无限逼近的数学极限思想方法解决数学问题.

以上两题在很大程度上是需要通过数学直觉才能辨别各种关系, 突破难点, 达到解决问题的目的. 考查了数学直觉能力, 其数学内涵较为深刻. 所以在教学中要高度重视内涵深刻的数学问题, 研究其解决方法的思维特征, 通过变式、转化等多种方法引导学生观察分析、广泛联系, 形成基本数学经验, 以培养数学直觉能力.

三、善于分析和转化, 以培养数学能力

上海市高考数学试题一贯坚持数学能力与一般能力相结合的考查风格, 注重能力立意, 在大力提倡自主创新的时代背景下, 倡导高中学生研究性学习显得尤为重要, 关键是要学会学习, 学会研究问题, 善于分析和转化, 善于在知识之间及时建立联系, 并能将复杂问题转化为简单问题, 将空间问题转化为平面问题, 将抽象问题转化为具体问题, 等等.

如理科卷第23题:

已知平面上的线段 l 及点 P. 任取 l 上一点 Q, 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P,l)$.

(1) 求点 $P(1,1)$ 到线段 $l: x-y-3=0\ (3\leqslant x\leqslant 5)$ 的距离 $d(P,l)$;

(2) 设 l 是长为2的线段, 求点的集合 $D=\{P|d(P,l)\leqslant 1\}$ 所表示的图形面积;

(3) 写出到两条线段 l_1、l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=\{P|d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$, 其中 $l_1=AB$、$l_2=CD$, A、B、C、D 是下列三组点中的一组.

对于下列三种情形，只需选做一种，满分分别是① 2分，② 6分，③ 8分；若选择了多于一种的情形，则按照序号较小的解答计分.

① $A(1,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,3)$、$D(-1,0)$.

② $A(1,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,3)$、$D(-1,-2)$.

③ $A(0,1)$、$B(0,0)$、$C(0,0)$、$D(2,0)$.

本题考查坐标平面上的点与线段之间的位置关系和度量关系，用代数的方法研究几何问题的能力. 考查考生学习新的数学知识及其运用能力，分析、判断、辨析、选择和取舍的能力. 属开放性、分层评价性问题.

解答：(1) 设$Q(x,x-3)$是线段$l: x-y-3=0\,(3\leqslant x\leqslant 5)$上一点，则

$$|PQ|=\sqrt{(x-1)^2+(x-4)^2}$$
$$=\sqrt{2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{2}}\ (3\leqslant x\leqslant 5),$$

当$x=3$时，$d(P,l)=|PQ|_{\min}=\sqrt{5}$.

(2) 设线段l的端点分别为A、B，以直线AB为x轴，AB的中点为原点建立平面直角坐标系，如图1，则$A(-1,0)$, $B(1,0)$，点集D由如下曲线围成 $l_1: y=1\,(|x|\leqslant 1)$, $l_2: y=-1\,(|x|\leqslant 1)$, $C_1: (x+1)^2+y^2=1\,(x\leqslant -1)$, $C_2: (x-1)^2+y^2=1\,(x\geqslant 1)$，其面积为$S=4+\pi$.

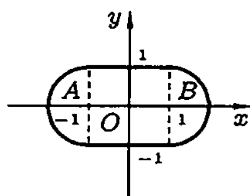


图 1

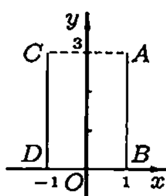


图 2

(3) ① 选择 $A(1,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,3)$、$D(-1,0)$, $\Omega=\{(x,y)|x=0\}$，如图2;

② 选择$A(1,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,3)$、$D(-1,-2)$, $\Omega=\{(x,y)|x=0,y\geqslant 0\}\cup\{(x,y)|y^2=4x,-2\leqslant y<0\}\cup\{(x,y)|x+y+1=0,x>1\}$，如图3;

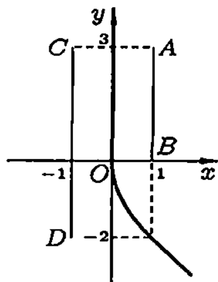


图 3

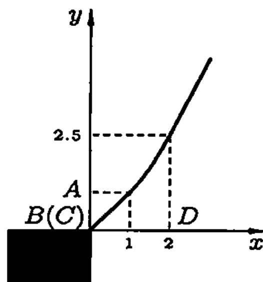


图 4

③ 选择 $A(0,1)$、$B(0,0)$、$C(0,0)$、$D(2,0)$. $\Omega=\{(x,y)|x\leqslant 0,y\leqslant 0\}\cup\{(x,y)|y=x,0<x\leqslant 1\}\cup\{(x,y)|x^2=2y-1,1<x\leqslant 2\}\cup\{(x,y)|4x-2y-3=0,x>2\}$，如图4.

尽管在之前的春考试卷中曾考过“平面上的点到线段的距离”问题，但对于考生来讲此题的定义仍是一个新的概念，需要考生在考场上临阵思考、学习和运用，也真正考查到了学生对数学问题的理解和分析能力，还说明了一种价值取向的观念.

高考解答题中的几个小题常常是有内在联系的，后面的问题要么直接用到前面的结论解决问题，要么间接地用到前面类似的结论解决问题，要么需用到前面类似的解决问题的思想方法来探究问题，这样的三个层次对思维的要求是不断提高递进的，需要考生在平时的复习中加以关注.

从以上对2011年高考上海数学卷中典型试题的简要分析，可以看出数学思想方法的考查是高考的一个重要考查目标，特别是数形结合、分类讨论、转化、化归等思想方法. 数学思想、数学方法，包括对数学内涵的理解和数学实质的把握是答好整份试卷的基石. 所以在进行基础知识和基本技能训练时，要经常有意识地挖掘隐藏在问题背后的数学思想及其数学本质特征，这样才能真正打好基础，提高数学素养.

顺便提出，2011年高考上海数学卷中的集合知识考得较多，如理科卷第2、10、22、23题，分值达44分，集合论是现代数学的基础，集合语言是数学表达的基本形式，是中等数学与高等数学的一个衔接点. 另外，不能因为整张试卷对中学数学主干知识——解析几何和数列(包括其常见的主要方法)考得较少，就忽略或者淡化对主干知识的复习. 也不能因为理科卷第20题(文科卷第21题)对指数不等式内容着重考查了，就特别加强指、对数不等式解法的训练，实际上，这一题恰恰反映了指、对数函数单调性的应用，考查了指、对数函数的基本性质. 因此，我们的教学还是应该从课程的整体上全面地把握基本内容与教学要求，还是要从基本概念、基本原理出发分析问题、解决问题比较好.

(在本文撰写过程中，得到了顾鸿达先生的大力指导，在此表示衷心感谢!)

从仿射变换角度看2011年高考山东理科第22题

724300 陕西省略阳县天津高级中学 陈 波

题目 (2011年高考山东省理科第22题) 已知动直线l与椭圆$C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两个不同点, 且$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 其中$O$为坐标原点.

(I) 证明: $x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$均为定值;

(II) 设线段PQ的中点为M, 求$|OM|\cdot|PQ|$的最大值;

(III) 椭圆C上是否存在三点D、E、G, 使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在, 判断$\triangle DEG$的形状; 若不存在, 请说明理由.

椭圆经过仿射变换可以得到圆. 因此对于椭圆的一些问题, 只需对圆进行研究, 就能达到事半功倍的效果. 本文就2011年高考数学山东卷理科第22题的第(I)小题和第(III)小题, 从仿射变换的角度进行一次探究.

1. 仿射变换的角度求解更简洁

令$x'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$, 则椭圆$C:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$变成圆$x'^2+y'^2=1$. 因此, 图1与图2对应. 同时点$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$分别对应点$P'(x_1',y_1')$、$Q'(x_2',y_2')$.

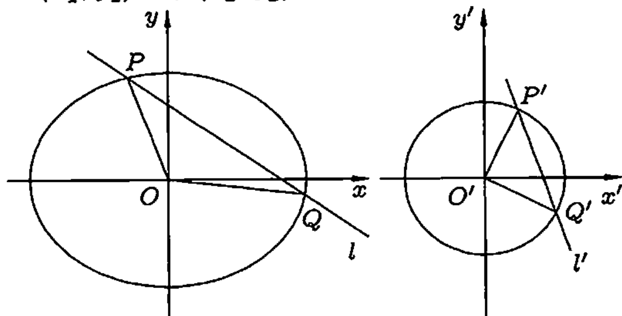


图1 图2

(I) 由于两个封闭图形的面积之比是仿射不变量, 所以有$\dfrac{S_{\triangle O'P'Q'}}{S_{\triangle OPQ}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, 而$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 得$S_{\triangle O'P'Q'}=\dfrac{1}{2}$. 在圆$x'^2+y'^2=1$中, 由$S_{\triangle O'P'Q'}=\dfrac{1}{2}\sin\angle P'O'Q'=\dfrac{1}{2}$, 可知$\angle P'O'Q'=\dfrac{\pi}{2}$. 于是得:

$$x_1'^2+y_1'^2=1, \quad ①$$
$$x_2'^2+y_2'^2=1, \quad ②$$
$$x_1'x_2'+y_1'y_2'=0. \quad ③$$

由①、②、③有, $y_1'^2y_2'^2=(1-x_1'^2)(1-x_2'^2)=1-(x_1'^2+x_2'^2)+x_1'^2x_2'^2$,

从而$x_1'^2+x_2'^2=1+x_1'^2x_2'^2-y_1'^2y_2'^2=1$,

$y_1'^2+y_2'^2=(1-x_1'^2)+(1-x_2'^2)$
$=2-(x_1'^2+x_2'^2)=1$.

由变换$x'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$, $y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$,

所以$x_1^2+x_2^2=3$, $y_1^2+y_2^2=2$.

(III) 如图2所示, 可以先考虑在圆$x'^2+y'^2=1$上是否存在三点D'、E'、G', 使得$S_{\triangle O'D'E'}=S_{\triangle O'D'G'}=S_{\triangle O'E'G'}=\dfrac{1}{2}$?

若存在符合要求的三点D'、E'、G', 则由$S_{\triangle O'D'E'}=S_{\triangle O'D'G'}=S_{\triangle O'E'G'}=\dfrac{1}{2}$得

$$\frac{1}{2}\sin\angle D'O'E'=\frac{1}{2}\sin\angle D'O'G'=\frac{1}{2}\sin\angle E'O'G'=\frac{1}{2},$$

所以$\angle D'O'E'=\angle D'O'G'=\angle E'O'G'=\dfrac{\pi}{2}$, 与$\angle D'O'E'+\angle D'O'G'+\angle E'O'G'=2\pi$矛盾.

所以圆$x'^2+y'^2=1$上不存在三点D'、E'、G', 使得$S_{\triangle O'D'E'}=S_{\triangle O'D'G'}=S_{\triangle O'E'G'}=\dfrac{1}{2}$.

从而椭圆C上不存在三点D、E、G, 使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

2. 解题反思及推论

题目中动直线l与椭圆C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两不同点, 形成的$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}$与$x_1^2+x_2^2$、$y_1^2+y_2^2$有什么样的内在联系?

对第(I)小题的解答过程进一步反思、探究, 发现:

如图2所示, 在圆$x'^2+y'^2=1$中, $S_{\triangle O'P'Q'}=\frac{1}{2}$时, 动直线$l'$始终保持着一个恒定不变的关系就是$O'P'\perp O'Q'$, 即$x_1'x_2'+y_1'y_2'=0$. 因此, ${x_1'}^2+{x_2'}^2=1+{x_1'}^2{x_2'}^2-{y_1'}^2{y_2'}^2=1$, ${y_1'}^2+{y_2'}^2=(1-{x_1'}^2)+(1-{x_2'}^2)=1$. 从而$x_1^2+x_2^2=3$, $y_1^2+y_2^2=2$.

同时, 也注意到若$x_1'x_2'+y_1'y_2'=0$, 则$O'P'\perp O'Q'$, 所以在圆$x'^2+y'^2=1$中一定有$S_{\triangle O'P'Q'}=\frac{1}{2}$.

于是, 从仿射变换的角度可以得到:

推论1 动直线l与椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两不同点, 且$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}$, 其中$O$为坐标原点, 则$x_1^2+x_2^2=a^2$, $y_1^2+y_2^2=b^2$.

对于推论1, 从仿射变换的角度是不难证明的. 在此, 本文从高考试题常规解法的角度给出证明.

(1) 当直线l的斜率不存在时, P、Q两点关于x对称, 则$x_1=x_2$, $y_1=-y_2$.

由$P(x_1,y_1)$在椭圆上, 有$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ ⋯ ④

又因为$S_{\triangle OPQ}=|x_1||y_1|=\frac{ab}{2}$. ⋯⋯⋯⋯ ⑤

由④和⑤得$x_1^2=\frac{a^2}{2}$, $y_1^2=\frac{b^2}{2}$,

所以$x_1^2+x_2^2=a^2$, $y_1^2+y_2^2=b^2$.

(2) 当直线l的斜率存在时, 设直线l的方程为$y=kx+m$, 由题意$m\neq 0$.

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 得

$(a^2k^2+b^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$,

其中$\Delta=4k^2m^2a^4-4(a^2k^2+b^2)(a^2m^2-a^2b^2)>0$, 即$a^2k^2+b^2>m^2$,

由韦达定理得$x_1+x_2=-\frac{2kma^2}{a^2k^2+b^2}$,

$x_1x_2=\frac{a^2m^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2}$.

设原点O到直线l的距离为$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$, 有:

$$\begin{aligned} S_{\triangle OPQ}&=\frac{1}{2}|PQ|d \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} \\ &=\frac{|m|}{2}\sqrt{\frac{4k^2m^2a^4}{(a^2k^2+b^2)^2}-\frac{4a^2m^2-4a^2b^2}{a^2k^2+b^2}} \\ &=\frac{|m|ab\sqrt{a^2k^2+b^2-m^2}}{a^2k^2+b^2}=\frac{ab}{2}, \end{aligned}$$

所以$a^2k^2+b^2=2m^2$. 此时,

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \\ &=\frac{4k^2m^2a^4}{(a^2k^2+b^2)^2}-\frac{2a^2m^2-2a^2b^2}{a^2k^2+b^2} \\ &=\frac{a^2(a^2k^2+b^2)-a^2m^2}{m^2}=a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1^2+y_2^2&=\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2\right)+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2\right) \\ &=2b^2-\frac{b^2}{a^2}(x_1^2+x_2^2)=b^2. \end{aligned}$$

综上可知$x_1^2+x_2^2=a^2$, $y_1^2+y_2^2=b^2$.

同理, 有:

推论2 动直线l与椭圆C: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两不同点, 且$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}$, 其中$O$为坐标原点, 则$x_1^2+x_2^2=b^2$, $y_1^2+y_2^2=a^2$.

椭圆C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$上是否存在三点$D$、$E$、$G$, 使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=S$? 若存在, S的值应该是多少?

从圆$x'^2+y'^2=1$中可以看出, 存在三点D'、E'、G', 使$S_{\triangle O'D'E'}=S_{\triangle O'D'G'}=S_{\triangle O'E'G'}=S'=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 如$D'(1,0)$、$E'\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$、$G'\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

相应地, 椭圆C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$上, 存在三点$D$、$E$、$G$, 使$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=S=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 如$D(\sqrt{3},0)$、$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$、$G\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

一般地, 有:

推论3 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或椭圆$C$: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$上存在三点$D$、$E$、$G$, 使$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=S=\frac{\sqrt{3}ab}{4}$.

题目中第(I)小题与第(Ⅲ)小题有什么联系?

设椭圆C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$上存在三点$D(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$、$G(x_3,y_3)$, 使得

$$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

由第(I)小题, 有$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_3^2,\\ x_1^2+x_2^2=x_2^2+x_3^2,\end{cases}$

所以得$x_1^2=x_2^2=x_3^2$, 即

$x_1=\pm x_2=\pm x_3$.

同理, $y_1=\pm y_2=\pm y_3$.

所以得(x_1,y_1)、$(x_1,-y_1)$、$(-x_1,y_1)$、$(-x_1,-y_1)$这四点中, 其中任意三点中必有两点与O共线.

故若$x_1^2+x_2^2=x_2^2+x_3^2=x_1^2+x_3^2=$常数, 则$S_{\triangle ODE}$、$S_{\triangle ODG}$、$S_{\triangle OEG}$必不全相等.

再结合推论1、推论2, 容易得:

推论4 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或椭圆$C$: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$上存在三点$D(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$、$G(x_3,y_3)$, 若$x_1^2+x_2^2=x_2^2+x_3^2=x_1^2+x_3^2=$常数, 则$S_{\triangle ODE}$、$S_{\triangle ODG}$、$S_{\triangle OEG}$必不全相等.

由于原命题与它的逆否命题同真同假, 所以容易得:

推论5 椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或椭圆$C$: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$上存在三点$D(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$、$G(x_3,y_3)$, 若$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=S$, 则三点中任两点的横坐标平方和及纵坐标平方和必不为常数.

3. 教学启示

从这道题目来看, 高考压轴题并非是无源之水, 而是有根可寻. 高等数学或数学竞赛试题中的一些思想、方法都为高考压轴题的设计提供了广阔的背景. 作为高中教师, 应该深入研究高考试题, 了解试题的背景, 挖掘试题的本质, 居高临下地认识高考试题. 这也是提高高三课堂复习效率的重要手段.

(上接第2-25页)

迷惑的地方, 作为一线教师的我们该怎样设计出这些精彩的铺垫呢? 而《高中数学题根》这本书, 在解题方面, 恰恰提供了一些变式的设计方法, 比如上例中由集合中5个元素到n个元素的推广法(题根到变式1); 从有集合限定范围到去掉集合限定的条件弱化法(变式1到变式2、3), 由单一规则到多规则的方法类比法(变式2、3到变式4、5)等, 这些变式不仅对学生解答难题、梳理知识做了很好的铺垫, 更帮助一线教师的我们理清了题与题之间的关系, 透视了问题的本质, 更教会了我们题根到底该怎样变. 书中还有很多的变化方法: 如变背景、变对象、变形式、变规则、变条件等. 变式非常之丰富, 且有许多创新之见, 对教师的教学研究和对命题的研究都大有裨益.

三、不变与变的辩证关系: 唤醒深层思考问题的潜能

一些国际比较的研究显示, 与西方学生相比, 尽管中国学生在解决常规问题上有相当的优势, 但是在解决应用题、开放性问题上则表现平平(蔡金发). 从变式的角度看, 可以通过设计较远的潜在距离或较大跨度的铺垫, 使学习过程更具有挑战性, 同时题目的变化更引导着学生的思维变化, 有利于培养学生的多角度思考问题的能力, 并为学生解答开放性问题提供了提出问题的方法, 如变换题目背景、条件、规则等, 对培养学生的探究能力、创新能力搭建了很好的平台. 《高中数学题根》这本书是对顾泠沅老师提出的"铺设适当的潜在距离, 建构适当的变异空间(《变革的见证》)"的理念恰到好处的实践.

总之, 《高中数学题根》这本书, 发展了中国数学教育特色之一的数学问题的"变式"处理. 通过"变式"形成知识网络, 处理好了基础与难题之间的关系. 没有基础的创新是空想, 没有创新的基础是傻练, 处理好两者的关系, 是我们不懈的努力方向.

高考中的"初等数论"倩影素描

213003 江苏省常州高级中学 徐德同

数论在数学中的地位是独特的, 高斯曾经说过"数学是科学的皇后, 数论是数学中的皇冠". 本文以近几年的考题为载体来简述高考中的数论知识与方法.

1. 奇偶分析

奇数与偶数有如下概念与性质:

(1) 若一个整数能被2整除, 则这个整数叫偶数. 若一个整数被2除余1, 则这个整数叫奇数;

(2) 奇数个奇数的和(或差)是奇数, 偶数个奇数的和(或差)是偶数;

(3) 一个奇数与一个偶数的和(或差)是奇数;

(4) 任意多个奇数的积是奇数.

例1 (2010年全国高考湖北卷) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$, $\frac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n}=\frac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$, $a_na_{n+1}<0\,(n\geqslant 1)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 中任意三项不可能成等差数列.

解: (1) 由已知得 $3(1-a_{n+1}^2)=2(1-a_n^2)$. 令 $1-a_n^2=c_n$, 所以 $3c_{n+1}=2c_n$, 易求得

$$c_n=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

$$a_n=(-1)^{n+1}\sqrt{1-\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}},$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

(2) 设有三项 b_p, b_q, $b_r\,(1\leqslant p<q<r)$ 成等差数列, 则 $2b_q=b_p+b_r$, 代入得

$$2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{q-1}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1},$$

即 $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{q-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}$. ……… ①

因为 $0\leqslant p-1<q-1<r-1$, 所以 ① 式可化为 $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{q-p}=1+\left(\frac{2}{3}\right)^{r-p}$, 即

$$2\cdot 2^{q-p}\cdot 3^{r-q}=3^{r-p}+2^{r-p}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

观察 ② 式的两边, 左边是"偶数", 右边是"奇数+偶数=奇数", 矛盾. 故数列 $\{b_n\}$ 中任意三项都不可能成等差数列.

2. 整数与整除

整数主要有以下的性质:

(1) 运算封闭性: 任何两个整数的和、差、积以及乘方运算的结果仍为整数;

(2) 确定性: 区间 $[m,n]\,(m<n)$ 内的整数是确定的;

(3) 若 a 能被 b 整除, 即 $\frac{a}{b}=q\,(a、b、q\in\mathbf{Z})$, 则 b 是 a 的约数(因数).

例2 (2009年全国高考北京卷改编) 已知整数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\,(1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n)$ 具有性质 P: 对任意的 i、$j\,(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$, a_ia_j 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A.

证明: $a_1=1$, 且 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n$.

证明: 因为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 具有性质 P, 所以 a_na_n 与 $\frac{a_n}{a_n}$ 中至少有一个属于 A.

由于 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$, 所以 $a_na_n>a_n$, 故 $a_na_n\notin A$, 从而 $1=\frac{a_n}{a_n}\in A$, 所以 $a_1=1$.

又因为 $1=a_1<a_2<\cdots<a_n$, 所以 $a_ka_n>a_n$, 故 $a_ka_n\notin A\,(k=2,3,\cdots,n)$.

由 A 具有性质 P 可知 $\frac{a_n}{a_k}\in A\,(k=2,3,\cdots,n)$.

又因为 $\frac{a_n}{a_n}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\cdots<\frac{a_n}{a_2}<\frac{a_n}{a_1}$,
由整数的确定性必有

$$\frac{a_n}{a_n}=1, \frac{a_n}{a_{n-1}}=a_2, \cdots, \frac{a_n}{a_2}=a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1}=a_n,$$

从而 $\frac{a_n}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{a_n}{a_2}+\frac{a_n}{a_1}$
$=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$,

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=a_n.$$

例3 (2009年全国高考江苏卷) 设$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列, S_n为其前n项和, 满足$a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2$, $S_7=7$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式及前n项和S_n;

(2) 试求所有的正整数m, 使得$\dfrac{a_ma_{m+1}}{a_{m+2}}$为数列$\{a_n\}$中的项.

解: (1) 易求得$a_n=2n-7$, $S_n=n^2-6n$.

(2) 由(1)得

$$\frac{a_ma_{m+1}}{a_{m+2}}=\frac{(2m-7)(2m-5)}{2m-3}$$
$$=\frac{(2m-3)^2-6(2m-3)+8}{2m-3}$$
$$=2m-3-6+\frac{8}{2m-3}.$$

因为数列$\{a_n\}$中的项都是整数, 所以$2m-3$是8的因数. 又因为$2m-3$是奇数, 8是偶数, 故$2m-3$可取的值为±1.

当$2m-3=-1$时, $m=1$, 此时$\dfrac{a_ma_{m+1}}{a_{m+2}}=-15$, 数列$\{a_n\}$中的最小项是$-5$, 不符合;

当$2m-3=1$时, $m=2$, 此时$\dfrac{a_ma_{m+1}}{a_{m+2}}=3$, 是数列$\{a_n\}$中的项.

所以满足题意的正整数只有$m=2$.

3. 不定方程

解不定方程的技巧很多, 高考中考查的主要有两种: 一是因式分解; 二是不等式估计. 所谓因式分解, 是将方程的一边化为常数, 并作因数分解. 方程的另一边含有未知数的代数式也作因式分解, 再考虑各个因式的取值, 分解成若干个方程来解. 所谓不等式估计, 是利用不等式进行放缩, 目的是夹出某些未知数的范围.

例4 (2011年全国高考扬州市第一次调研题) 设数列$\{a_n\}$的首项为1, 前n项和是S_n, 存在常数A、B使得$a_n+S_n=An+B$对任意正整数n都成立.

(1) 设$A=0$, 求证: 数列$\{a_n\}$是等比数列;

(2) 设数列$\{a_n\}$是等差数列, 若$p<q$, 且$\dfrac{1}{S_p}+\dfrac{1}{S_q}=\dfrac{1}{S_{11}}$, 求$p$, q的值.

解析: 第(1)小题此处略. 对于第(2)小题, 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d, 因为$a_n+S_n=An+B$对任意正整数n都成立, 分别令$n=1, 2, 3$代入得

$$\begin{cases}a_1+S_1=A+B,\\ a_2+S_2=2A+B,\\ a_3+S_3=3A+B,\end{cases}$$

即$\begin{cases}2=A+B,\\ 2d+3=2A+B,\\ 5d+4=3A+B,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}A=1,\\ B=1,\\ d=0.\end{cases}$

推出$a_n=1$, $S_n=n$. 由$\dfrac{1}{S_p}+\dfrac{1}{S_q}=\dfrac{1}{S_{11}}$得$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{11}$, 即$pq-11p-11q=0$.

将此不定方程的左边作因式分解得

$(p-11)(q-11)=11^2$.

由于$p<q$, 且$11^2=1\times121$,

所以$\begin{cases}p-11=1,\\ q-11=121,\end{cases}$

解得$p=12$, $q=132$.

例5 求方程$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{4}{5}$的正整数解.

解: 不妨设$0<x\leqslant y\leqslant z$, 所以$\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{1}{y}\geqslant\dfrac{1}{z}$, 从而$\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqslant\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$, 即$x\leqslant\dfrac{15}{4}$. 因为$x\in\mathbf{Z}_+$, 所以$x$只能取1, 2, 3. 把$x$分别代入原方程, 解得

$$\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=4,\\ z_1=20,\end{cases}\ 及\ \begin{cases}x_2=2,\\ y_2=5,\\ z_2=10.\end{cases}$$

4. 取整函数

取整函数$y=[x]$的定义: 设$x\in\mathbf{R}$, 用$[x]$表示不超过x的最大整数(如$[0.2]=0$, $[-0.1]=-1$, $[\pi]=3$等等), 则$y=[x]$称为取整函数. 取整函数也叫高斯函数, 由德国著名数学家高斯首次提出. 其图像如图1所示.

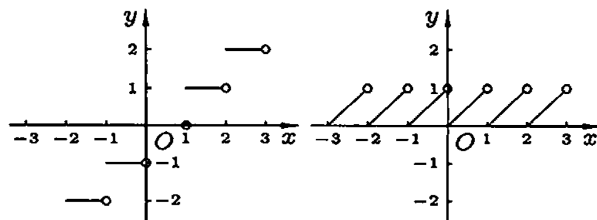


图1　　图2

由高斯函数派生出函数$\{x\}$: $\{x\}$定义为实数x的正的纯小数部分, 即$\{x\}=x-[x]$. 其图像如图2所示.

例6 设集合$A=\{x|x^2-[x]=2\}$, $B=$

$\{x||x|<2\}$, 其中符号$[x]$表示不大于x的最大整数, 则$A\cap B=$______.

解: 由B得$-2<x<2$,

当$-2<x<-1$时, $[x]=-2$, 由A得$x^2+2=2$, 解得$x=0$(舍);

当$-1\leqslant x<0$时, $[x]=-1$, 由A得$x^2+1=2$, 解得$x=\pm1$, $\therefore x=-1$;

当$0\leqslant x<1$时, $[x]=0$, 由A得$x^2-0=2$, 解得$x=\pm\sqrt{2}$(舍);

当$1\leqslant x<2$时, $[x]=1$, 由A得$x^2-1=2$, 解得$x=\pm\sqrt{3}$, $\therefore x=\sqrt{3}$.

所以$A\cap B=\{-1,\sqrt{3}\}$.

例7　设函数$f(x)=\begin{cases}x-[x],x\geqslant0,\\ f(x+1),x<0,\end{cases}$其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数, (如$[-1.1]=-2$, $[\pi]=3$等等), 若直线$y=kx+k(k>0)$与函数$y=f(x)$的图像恰有三个不同的交点, 则实数k的取值范围是______.

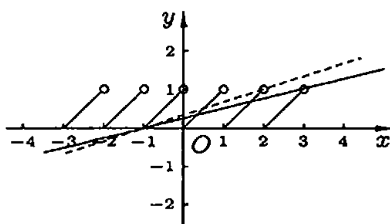


图3

解: 直线$y=kx+k(k>0)$恒过定点$(-1,0)$, 在同一直角坐标系中作出函数$y=f(x)$的图像和直线$y=kx+k(k>0)$的图像, 如图3所示, 因为恰有三个不同的交点, 得$\frac{1}{4}\leqslant k<\frac{1}{3}$.

5. 整点(格点)问题

(1) 整点的定义: 在平面直角坐标系中, 横、纵坐标均为整数的点叫做整点, 整点也叫格点.

(2) 整点的分类: 根据整数的奇偶性可以把整点分为(奇, 奇)、(奇, 偶)、(偶, 奇)、(偶, 偶)4类.

(3) 正方形内的整点: 内部不含整点的正方形, 面积最大值是2; 内部只含一个整点的正方形, 面积最大值是4; 各边均平行于坐标轴的正方形, 如果内部不含整点, 面积最大值是1.

例8　(2011年全国高考北京卷) 设$A(0,0)$、$B(4,0)$、$C(t+4,4)$、$D(t,4)$ $(t\in\mathbf{R})$, 记$N(t)$为平行四边形$ABCD$内部(不含边界)的整点的个数, 平面内横、纵坐标都是整数的点称为整点, 则函数$N(t)$的值域为……………………( ).

(A) $\{9,10,11\}$;　　(B) $\{9,10,12\}$;

(C) $\{9,11,12\}$;　　(D) $\{10,11,12\}$.

答案为(C).

初等数论知识朴素自然, 方法思维缜密, 现代应用广泛, 笔者认为在今后的高考试题中会越来越多地出现她的身影, 笔者上述文字权当抛砖引玉.

(上接第2-48页)

题)

847. 已知n是正整数, 求证: $(\sec x\csc x)^{2n}-(\sec^{2n}x+\csc^{2n}x)\geqslant2^{2n}-2^{n+1}$.

(274300　山东省单县二中　齐行超供题)

848. 已知$\triangle ABC$的垂心H在该三角形内, 又点H到顶点A、B、C的距离分别为1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$, 试求重心H到三条边BC、CA、AB的距离.

(223800　江苏省宿迁中学　陈炳堂供题)

849. 已知$\odot O$的非直径弦AC与BD相交于点M, 射线BA与CD相交于点P, 过A、C作$\odot O$的切线相交于点N, 过点B、D作$\odot O$的切线相交于点Q, 如图2. 求证: P、Q、N三点共线.

(404506　重庆市云阳县江口中学　姜官扬供题)

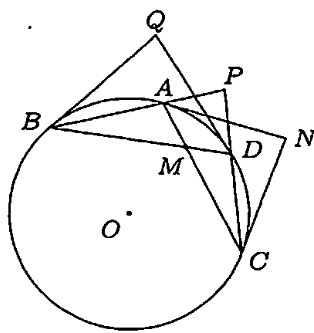


图2

850. 设$\sigma(n)$表示正整数n的正约数之和. 求证: 存在无穷多个正整数n, 使$\sigma(n)>2008n$.

(法国考题　200002　上海黄浦区教师进修学院　周元解答)

(本栏目责任编辑　李大元　汪纯中)

对2011年高考山东卷理科22(I)题的研究

256200 山东省邹平县教育局教研室 姜坤崇

题目 已知直线l与椭圆C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两不同点, 且$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 其中$O$为坐标原点.

(I) 证明: $x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$为定值;

(II) 设线段PQ的中点为M, 求$|OM|\cdot|PQ|$的最大值;

(III) 椭圆C上是否存在点D、E、G使得$S_{\triangle ODE}=S_{\triangle ODG}=S_{\triangle OEG}=\frac{\sqrt{6}}{2}$? 若存在, 判断$\triangle DEG$的形状; 若不存在, 请说明理由.

本题是2011年全国高考山东省理科压轴题, 除了考查诸多数学思想方法以外, 在知识上主要考查直线方程、三角形的面积、直线与圆锥曲线的位置关系、圆锥曲线的弦长、基本不等式及定值、最值、存在性等问题的探究与证明. 同时, 对学生的运算能力、逻辑思维能力、灵活运用所学知识和方法分析问题和解决问题的能力等提出了较高要求. 这道题新颖别致、不落俗套, 具有较高的学习与研究的价值. 本文仅对其中题(I)展开一些研究, 供读者参考.

1. 一般性结论

对于(I), 其答案是$x_1^2+x_2^2=3$, $y_1^2+y_2^2=2$, 而3、2分别为椭圆C的长、短半轴长的平方, 6为椭圆C长、短半轴长平方的乘积, 这样, 将椭圆C: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$一般化后可得结论:

结论1 已知直线l与椭圆C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两不同点, 且$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}$, 其中$O$为坐标原点(以下同), 则$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$为定值, 分别为$a^2$、$b^2$.

证明: (1) 当直线l的斜率不存在时, 点$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$关于x轴对称, 所以$x_1=x_2$, $y_1=-y_2$. 因为点$P(x_1,y_1)$在椭圆C上, 所以

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2-a^2b^2=0.\cdots\cdots ①$$

又因为$S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}$,

所以$$|x_1|\cdot|y_1|=\frac{ab}{2}.\cdots\cdots ②$$

由①、②得$|x_1|=\frac{\sqrt{2}a}{2}$, $|y_1|=\frac{\sqrt{2}b}{2}$, 此时$x_1^2+x_2^2=a^2$, $y_1^2+y_2^2=b^2$, 均为定值.

(2) 当直线l的斜率存在时, 设直线l的方程为$y=kx+m$, 由题意知$m\neq 0$, 将其代入C的方程整理得$(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$. 则

$$\Delta=4a^4k^2m^2-4a^2(a^2k^2+b^2)(m^2-b^2)=4a^2b^2(a^2k^2+b^2-m^2)>0,\cdots\cdots ③$$

所以$$a^2k^2+b^2-m^2>0.\cdots\cdots ④$$

由韦达定理得, $$x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{a^2k^2+b^2},\cdots ⑤$$

$$x_1x_2=\frac{a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2},\cdots\cdots ⑥$$

所以$$|PQ|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)\left[\frac{4a^4k^2m^2}{(a^2k^2+b^2)^2}-\frac{4a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}\right]}=\frac{2ab\sqrt{(1+k^2)(a^2k^2+b^2-m^2)}}{a^2k^2+b^2}.$$

因为点O到直线l的距离为$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以$$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{ab|m|\sqrt{a^2k^2+b^2-m^2}}{a^2k^2+b^2}.$$

又$S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}$,

所以$$\frac{ab|m|\sqrt{a^2k^2+b^2-m^2}}{a^2k^2+b^2}=\frac{ab}{2}.$$

将$a^2k^2+b^2$视为整体, 将上式整理后即得

$$a^2k^2+b^2=2m^2,\cdots\cdots ⑦$$

且⑦式满足④式, 所以由⑤、⑥式可得

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$= \frac{4a^4k^2m^2}{(a^2k^2+b^2)^2} - \frac{2a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}$$
$$= \frac{4a^4k^2m^2}{4m^4} - \frac{2a^2(m^2-b^2)}{2m^2}$$
$$= \frac{a^4k^2 - a^2m^2 + a^2b^2}{m^2}$$
$$= \frac{a^2(2m^2-b^2) - a^2m^2 + a^2b^2}{m^2} = a^2.$$

又由点$Q(x_2, y_2)$在椭圆C上知$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 - a^2b^2 = 0$,……⑧

于是由 ⑧ 式及 ① 式得

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2} + \frac{b^2(a^2-x_2^2)}{a^2}$$
$$= \frac{2a^2b^2 - b^2(x_1^2+x_2^2)}{a^2} = b^2.$$

2. 对结论中涉及的几个条件的等价条件的探讨

我们知道, 在一个数学问题中, 对于条件p、q, 若$p \Longleftrightarrow q$, 则$p \Longrightarrow q$和$q \Longrightarrow p$都是真命题, 因此寻求一个正确命题中条件和结论的充要条件(或充分条件, 或必要条件), 就可以得到原命题的一些变式命题了. 我们对结论1中的结论(亦可说是作为结论的条件) 和条件的等价条件作些探讨.

问题1　设$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$是椭圆C上的不同两点, 探讨与$x_1^2 + x_2^2 = a^2$等价的条件.

首先可以看出$x_1^2 + x_2^2 = a^2 \Longleftrightarrow y_1^2 + y_2^2 = b^2$. 这是因为, 由于$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$是椭圆上的两个不同点, 故由 ① 式和 ⑧ 式得

$$y_1^2 + y_2^2 = b^2$$
$$\Longleftrightarrow \frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2} + \frac{b^2(a^2-x_2^2)}{a^2} = b^2$$
$$\Longleftrightarrow \frac{2a^2 - (x_1^2+x_2^2)}{a^2} = 1 \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = a^2.$$

另外可得$x_1^2 + x_2^2 = a^2$

$$\Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = a^2 + b^2$$
$$\Longleftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = a^2b^2.$$

这是因为$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = a^2 + b^2$

$$\Longleftrightarrow x_1^2+x_2^2+\frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2}+\frac{b^2(a^2-x_2^2)}{a^2}=a^2+b^2$$
$$\Longleftrightarrow (a^2-b^2)(x_1^2+x_2^2-a^2)=0 \Longleftrightarrow x_1^2+x_2^2=a^2;$$

$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = a^2b^2$

$$\Longleftrightarrow (x_1^2+x_2^2)\left[\frac{b^2(a^2-x_1^2)}{a^2}+\frac{b^2(a^2-x_2^2)}{a^2}\right]=a^2b^2$$
$$\Longleftrightarrow [a^2 - (x_1^2 + x_2^2)]^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = a^2,$$

所以$x_1^2 + x_2^2 = a^2$

$$\Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = a^2 + b^2$$
$$\Longleftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = a^2b^2.$$

需指出的是, 式子$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = a^2 + b^2$即$|OP|^2 + |OQ|^2 = a^2 + b^2$(定值).

当然, 还有$x_1^2+x_2^2-(y_1^2+y_2^2) = a^2-b^2 \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = a^2$, $b^2(x_1^2 + x_2^2) = a^2(y_1^2 + y_2^2) \Longleftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = a^2$, 等等.

问题2　设直线$l: y = kx + m$交椭圆C于不同的两点$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$, 探讨与$x_1^2 + x_2^2 = a^2$等价的条件.

由 ⑤、⑥ 两式可得

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= \frac{4a^4k^2m^2}{(a^2k^2+b^2)^2} - \frac{2a^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}$$
$$= \frac{2a^2(a^2k^2m^2 + a^2b^2k^2 - b^2m^2 + b^4)}{(a^2k^2+b^2)^2},$$

所以$x_1^2 + x_2^2 = a^2$

$$\Longleftrightarrow \frac{2a^2(a^2k^2m^2 + a^2b^2k^2 - b^2m^2 + b^4)}{(a^2k^2+b^2)^2} = a^2$$
$$\Longleftrightarrow a^4k^4 - 2a^2m^2k^2 - b^2(b^2 - 2m^2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow (a^2k^2 + b^2 - 2m^2)(a^2k^2 - b^2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \text{⑦式或}\ k = \pm\frac{b}{a}.$$

问题3　设$P(x_1, y_1)$、$Q(x_2, y_2)$是椭圆C上的两个不同点, 探讨与$S_{\triangle OPQ}=\frac{ab}{2}$等价的条件.

由结论1的证明过程可以看出, 当直线l的斜率存在时, $S_{\triangle OPQ} = \frac{ab}{2} \Longleftrightarrow$ ⑦ 式, 故在直线l(即直线PQ)的斜率存在的前提下, 设直线l的方程为$y = kx + m$, 则$S_{\triangle OPQ} = \frac{ab}{2} \Longleftrightarrow$ ⑦ 式.

当直线l的斜率存在时, 由 ③ 式可知, 直线l与椭圆C相切的充要条件为$a^2k^2 + b^2 = m^2$, 由于这个式子与 ⑦ 式很相像, 因此我们猜测满足条件 ⑦ 的直线l应与另一椭圆相切. 事实上, 由于条件 ⑦ 等价于$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2k^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 = m^2$, 故$a^2k^2 + b^2 = 2m^2 \Longleftrightarrow$直线$l$与椭圆$E$: $\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2} = 1$即$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ $(a > b > 0)$相切.

由以上的探讨可知, 当直线l的斜率存在时, $S_{\triangle OPQ} = \frac{ab}{2} \Longleftrightarrow$直线$l$与椭圆$E$相切.

而当直线l的斜率不存在时, 亦不难证明

$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}\Longleftrightarrow$直线$l$与椭圆$E$相切,

因此, $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}\Longleftrightarrow$直线$l$与椭圆$E$相切.

说明: 可以证明, 以上问题中直线l与椭圆E的切点恰为椭圆C弦PQ的中点.

下面再来考察问题中满足条件 ⑦ 的点P、Q的横、纵坐标之积x_1x_2与y_1y_2的关系. 由于点$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$均在直线l上, 故$y_1=kx_1+m$, $y_2=kx_2+m$, 于是由 ⑤、⑥ 式可得

$$\begin{aligned}y_1y_2&=(kx_1+m)(kx_2+m)\\&=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2\\&=\frac{a^2k^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}-\frac{2a^2k^2m^2}{a^2k^2+b^2}+m^2\\&=-\frac{b^2(a^2k^2-m^2)}{a^2k^2+b^2}=-\frac{b^2(2m^2-b^2-m^2)}{2m^2}\\&=-\frac{b^2(m^2-b^2)}{2m^2}=-\frac{b^2x_1x_2}{a^2},\end{aligned}$$

即$b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0$.

反之, 由$b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0$亦可得 ⑦ 式, 所以在直线l的斜率存在的前提下, $b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0\Longleftrightarrow$ ⑦ 式$\Longleftrightarrow S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}$;

又当直线l的斜率不存在时, 亦可证明(从略) $b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0\Longleftrightarrow S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}$.

因此, $b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0\Longleftrightarrow S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}$.

说明: 当直线l不过椭圆C的顶点时, 条件$b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0\Longleftrightarrow k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}$(其中$k_{OP}$、$k_{OQ}$分别表示直线$OP$、$OQ$的斜率, 下同).

综合上面的讨论, 可得椭圆中的如下两个结论(具体证明不再给出):

定理1 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及$E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}\,(a>b>0)$, 直线$l$与椭圆$C$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两个不同点, 记$\triangle OPQ$的面积为$S_{\triangle OPQ}$, 则$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}\Longleftrightarrow$直线$l$与椭圆$E$相切$\Longleftrightarrow b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0$.

定理2 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 直线$l$与椭圆$C$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两个不同点, 则$x_1^2+x_2^2=a^2$ (或$y_1^2+y_2^2=b^2$) $\Longleftrightarrow$直线l与椭圆E相切, 或直线l与直线l_1: $y=\dfrac{b}{a}x$平行(或重合), 或直线l与直线l_2: $y=-\dfrac{b}{a}x$平行(或重合).

当然, 和$x_1^2+x_2^2=a^2$或$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}$等价的条件不止上述列举的这些, 请有兴趣的读者继续探讨.

3. 新命题的制作

在问题1中, 由于$x_1^2+x_2^2=a^2\Longleftrightarrow y_1^2+y_2^2=b^2\Longleftrightarrow|OP|^2+|OQ|^2=a^2+b^2\Longleftrightarrow(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)=a^2b^2$, 因此选取其中的一个式子作为条件, 剩下的一个作为结论所组成的命题都是正确的.

在问题2中, 由于$x_1^2+x_2^2=a^2\Longleftrightarrow$ ⑦ 式或$k=\pm\dfrac{b}{a}$, 故可得如下结论(或由定理2的结论得出):

结论2 设与直线l_1: $y=\dfrac{b}{a}x$ (或l_2: $y=-\dfrac{b}{a}x$) 平行或重合的直线与椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$交于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两个不同点, 则$x_1^2+x_2^2$、$y_1^2+y_2^2$及$|OP|^2+|OQ|^2$为定值.

根据问题2、3所得的一些结论, 以$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}$, 直线$l$与椭圆$E$相切, $b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0$ $\left(\text{或}k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}\right)$中的一个为条件, $x_1^2+x_2^2=a^2$或与之等价的条件为结论所组成的命题都是真命题.

另外, 在直线l的斜率存在的情形下, 由 ⑤、⑥ 式可得$b^2x_1x_2-a^2y_1y_1=\dfrac{a^2b^2(m^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}+\dfrac{a^2b^2(a^2k^2-m^2)}{a^2k^2+b^2}=\dfrac{a^2b^2(a^2k^2-b^2)}{a^2k^2+b^2}$, 故$b^2x_1x_2-a^2y_1y_1=0\Longleftrightarrow k=\pm\dfrac{b}{a}$, 于是可得

结论3 设$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$是椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$上的两个不同点, 且$b^2x_1x_2-a^2y_1y_1=0$ $\left(\text{或}k_{OP}\cdot k_{OQ}=\dfrac{b^2}{a^2}\right)$, 则$x_1^2+x_2^2$、$y_1^2+y_2^2$及$|OP|^2+|OQ|^2$为定值.

根据定理1的结论, 以$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{ab}{2}$, 直线$l$与椭圆$E$相切, $b^2x_1x_2+a^2y_1y_1=0$或

$k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}$其中的一个为条件, 剩下的一个为结论所组成的命题的都是成立的, 比如, 以条件“直线l与椭圆E相切”作为条件, 可以制作以下几个命题:

结论4 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及$E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}(a>b>0)$, 过椭圆$E$上的任意一点$M$引$E$的切线交椭圆$C$于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两点, 则$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$及$|OP|^2+|OQ|^2$为定值.

结论5 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及$E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}(a>b>0)$, 过椭圆$E$上的任意一点$M$引$E$的切线交椭圆$C$于$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$两点, 则$\triangle OPQ$的面积$S_{\triangle OPQ}$为定值.

限于篇幅, 以上两结论的证明均从略.

结论6 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及$E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}(a>b>0)$, l是椭圆E在其上任一点$M(x_0,y_0)$处的切线且l交椭圆C于P、Q两点, 则

(1) 当$y_0\neq\pm\dfrac{b}{2}$时, $k_{OP}\cdot k_{OQ}$为定值$-\dfrac{b^2}{a^2}$;

(2) 当$y_0=\pm\dfrac{b}{2}$时, $\angle POQ=90^\circ$.

证明: 如图1, 设$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 则由点$M(x_0,y_0)$在椭圆E上知

$$2b^2x_0^2+2a^2y_0^2-a^2b^2=0. \cdots\cdots ⑨$$

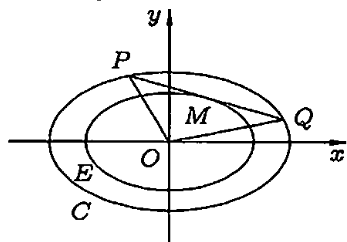


图 1

切线l的方程为$2b^2x_0x+2a^2y_0y-a^2b^2=0$, 即$a^2b^2=\dfrac{4(b^2x_0x+a^2y_0y)^2}{a^2b^2}$. $\cdots\cdots$ ⑩

(1) 当$y_0\neq\pm\dfrac{b}{2}$时, 将⑩式代入椭圆C的方程得 $b^2x^2+a^2y^2-\dfrac{4(b^2x_0x+a^2y_0y)^2}{a^2b^2}=0$.

上式整理后两边同除以x^2, 得$a^4(b^2-4y_0^2)t^2+8a^2b^2x_0y_0t+b^4(a^2-4x_0^2)=0\left(其中t=\dfrac{y}{x}\right)$.

由于$k_{OP}=\dfrac{y_1}{x_1}$, $k_{OQ}=\dfrac{y_2}{x_2}$是关于t的二次方程的两根, 故由韦达定理及⑨式知

$$k_{OP}\cdot k_{OQ}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^4(a^2-4x_0^2)}{a^4(b^2-4y_0^2)}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{2b^2(a^2b^2-2b^2x_0^2-2a^2y_0^2)}{a^4(b^2-4y_0^2)}=0,$$

即$k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\dfrac{b^2}{a^2}$.

(2) 当$y_0=\pm\dfrac{b}{2}$时, 由⑨式得$x_0=\pm\dfrac{a}{2}$, 不妨取$x_0=\dfrac{a}{2}$, $y_0=\dfrac{b}{2}$, 此时椭圆E在点M处的切线方程为$bx+ay-ab=0$, 它与椭圆C的两交点为$P(a,0)$、$Q(0,b)$, 显然有$\angle POQ=90^\circ$.

推论1 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及$E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}(a>b>0)$, 过椭圆$C$上任一点$M$引椭圆$E$的两条切线分别交椭圆$C$于$A$、$B$两点, 则直线$AB$过椭圆$C$的中心$O$.

证明: 当直线OM、OA、OB的斜率都存在时, 由结论6(1)知$k_{OA}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, $k_{OB}\cdot k_{OM}=-\dfrac{b^2}{a^2}$, 于是$k_{OA}=k_{OB}$, 从而直线$AB$过原点$O$; 当点$M$在一条坐标轴上时, 由结论6(2)知点$A$、$B$在另一条坐标轴上, 此时显然有直线$AB$过点$O$.

推论2 给定椭圆C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$及$E$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{1}{2}(a>b>0)$, 过椭圆$C$上任一点$M$引椭圆$E$的两条切线分别切$E$于$A$、$B$两点.

(1) 当直线MA、MB不与坐标轴垂直时, 设直线MA、MB的斜率分别为k_{MA}、k_{MB}, 则$k_{MA}\cdot k_{MB}$为定值$-\dfrac{b^2}{a^2}$;

(2) 当直线MA、MB中有一条与坐标轴垂直时$\angle AMB=90^\circ$.

证明: 如图2, 设直线MA、MB分别交椭圆C于另一点P、Q, 则由结论6推论1的结论知直线PQ过原点O.

(1) 当直线MP、MQ的斜率都存在时, 设$M(x_0,y_0)$、$P(x_1,y_1)$、$Q(-x_1,-y_1)$, 则$b^2x_i^2+$

一道浙江省高三联考试题的别解与拓展

310023 浙江省杭州外国语学校 潘 俊

浙江省名校高考研究联盟2011届高三第二次联考理科卷的试题卷中出现了这样一道解析几何试题, 原题如下:

如图1, 设F_1、F_2是椭圆C : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左、右焦点, A、B分别为其左顶点和上顶点, $\triangle BF_1F_2$是面积为$\sqrt{3}$的正三角形.

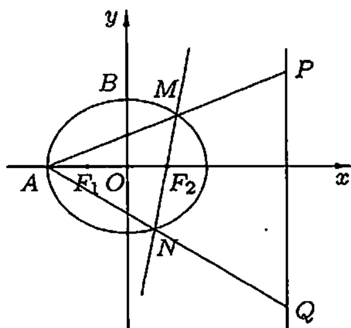


图 1

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过右焦点F_2的动直线l交椭圆于M、N两点, 直线AM、AN分别与已知直线$x=4$交于点P和Q, 试探究以线段PQ为直径的圆与直线l的位置关系.

先提供常规解法如下:

解: (1) $\because$ $\triangle BF_1F_2$是面积为$\sqrt{3}$的正三角形,

$\therefore$ $\frac{\sqrt{3}}{4}(2c)^2=\sqrt{3}$, $\therefore$ $c=1$.

$b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2c$, $\therefore$ $b=\sqrt{3}$.

故$a^2=4$.

$\therefore$ 椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 根据题意可知, 直线l斜率不为0, 设直线l方程为$x=my+1$, $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+1,\end{cases}$

化简可得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

由韦达定理得$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}.\end{cases}$

$\because$ A、M、P三点共线,

由$\overrightarrow{AM}=(my_1+3,y_1)$,

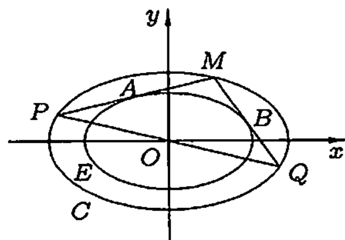


图 2

$a^2y_i^2-a^2b^2=0\,(i=0、1)$, 于是

$$k_{MP}\cdot k_{MQ}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}$$
$$=\frac{a^2y_0^2-a^2y_1^2}{a^2(x_0^2-x_1^2)}$$
$$=\frac{b^2(a^2-x_0^2)-b^2(a^2-x_1^2)}{a^2(x_0^2-x_1^2)}=-\frac{b^2}{a^2},$$

即$k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{b^2}{a^2}$.

(2) 当直线MP、MQ中有一条与坐标轴垂直时, 不妨设点M在第一象限, 此时点M的坐标为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$, 两切点$A$、$B$分别为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$、$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$, 显然有$\angle AMB=90^\circ$.

其余一些命题的制作及其证明留给读者自行探究.

参考文献

[1] 姜坤崇. 相似椭圆性质又探[J]. 数学通讯(下半月), 2011 (4): 36-37.

[2] 姜坤崇. 椭圆的"姊妹椭圆"与"姊妹圆"及其性质[J]. 中学教研(数学), 2011 (12): 34-37.

$\overrightarrow{AP}=(6,y_P)$得$y_P=\dfrac{6y_1}{my_1+3}$. 同理$y_Q=\dfrac{6y_2}{my_2+3}$, 线段$PQ$的中点为$D\left(4,\dfrac{y_P+y_Q}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}y_P+y_Q&=\frac{6y_1}{my_1+3}+\frac{6y_2}{my_2+3}\\&=\frac{6y_1(my_2+3)+6y_2(my_1+3)}{(my_1+3)(my_2+3)}\\&=\frac{12my_1y_2+18(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9},\end{aligned}$$

将$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}\end{cases}$代入化简得

$y_P+y_Q=-6m$, 从而有$D(4,-3m)$, 则点$D(4,-3m)$到直线l的距离为$d=3\sqrt{1+m^2}$.

以PQ为直径的圆的半径$r=\frac{1}{2}|y_P-y_Q|=\left|\dfrac{3y_1}{my_1+3}-\dfrac{3y_2}{my_2+3}\right|=\left|\dfrac{9(y_1-y_2)}{(my_1+3)(my_2+3)}\right|$,

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$,

再次将$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-6m}{3m^2+4},\\ y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}\end{cases}$代入化简得

$r=3\sqrt{1+m^2}$, 因为$d=r$, 所以以线段PQ为直径的圆与直线l相切.

上述常规解法中, 还是有一定运算量的, 而且对运算能力要求也比较高, 要想拿到满分并不轻松, 实际上学生练习后反馈的情况也确实如此.

一、结论的第一次推广

这是一道颇具美感、耐人寻味的好题, 在圆满解决了这个问题后, 笔者并没有放弃对该题第二小题的思考. 通过计算不难得到$DF_2=3\sqrt{1+m^2}$, 可见以线段PQ为直径的圆与直线l不仅相切, 而且还切于焦点, 这个性质是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$“独有”还是所有椭圆“共有”? 注意到直线$x=4$刚好是椭圆的右准线, 对此我们大胆提出猜想:

猜想1(定理1) 如图2, 设F_1、F_2是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左、右焦点, A为其左顶点, 过右焦点F_2的动直线l交椭圆于M、N两点, 直线AM、AN分别与椭圆右准线$x=\dfrac{a^2}{c}$交于P和Q, 则以线段PQ为直径的圆(D为PQ中点)与直线l一定切于右焦点F_2.

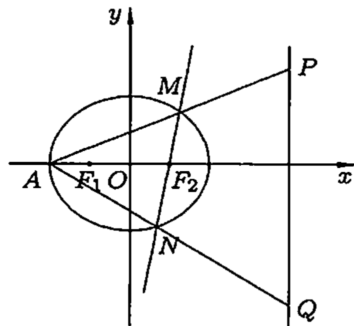


图2

笔者用同样的代数方法经过计算发现这是个真命题, 考虑到出现的直线是准线, 所以笔者试图从几何角度对该命题加以证明, 经过思考, 得到了几种满意的解答, 过程如下(在这里先给出一种几何证法, 读者也可自行思考):

证明分两步进行, 第一步证明以线段PQ为直径的圆一定过右焦点F_2, 第二步证明$DF_2\perp l$.

① 以线段PQ为直径的圆恒过右焦点F_2的证明.

设PQ交x轴于点L, 过点M作$MS\perp PQ$, 过点N作$NT\perp PQ$, 连结PF_2交MS于点M'.

易得$\triangle PMM'\backsim\triangle PAF_2$, 从而有$\dfrac{MM'}{AF_2}=\dfrac{PM}{PA}$; 易得$\triangle PMS\backsim\triangle PAL$, 从而有$\dfrac{MS}{AL}=\dfrac{PM}{PA}$, 所以可得$\dfrac{MM'}{AF_2}=\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{MS}{AL}$, 变形得$\dfrac{MM'}{MS}=\dfrac{AF_2}{AL}=\dfrac{a+c}{\frac{a^2}{c}+a}=\dfrac{c}{a}$. 另一方面, 由椭圆第二定义得$\dfrac{MF_2}{MS}=\dfrac{c}{a}$, 从而有$\dfrac{MM'}{MS}=\dfrac{MF_2}{MS}$, 即$MM'=MF_2$, 则有$\angle MF_2M'=\angle MM'F_2$. 又由$MS/\!/AL\implies\angle MM'F_2=\angle M'F_2L$, 从而有$\angle MF_2M'=\angle M'F_2L$, 即$F_2P$是$\angle MF_2L$的平分线.

同理可得F_2Q是$\angle NF_2L$的平分线, 所以可得$\angle PF_2Q=90^\circ$, 即以线段PQ为直径的圆恒过右焦点F_2.

② $DF_2\perp l$的证明 分别过点P、Q作l的垂线, 垂足分别为P'、Q', 因为F_2P是$\angle MF_2L$的平分线, 根据角平分线性质我们得$PP'=PL$且$P'F_2=F_2L$.

同理可得$QQ'=QL$且$Q'F_2=F_2L$, 进一步我们有$PP'+QQ'=PL+QL=PQ$, 且F_2

为$P'Q'$中点, 在梯形$PP'Q'Q$中F_2D为中位线, 从而有$DF_2/\!/PP'$, 即$DF_2\perp l$.

至此, 猜想证毕.

可见上述平面几何解法相对于解析法的计算量而言要简洁得多.

在上述猜想的证明过程的基础上, 我们可得到下列结论: 当定直线$x=\dfrac{a^2}{c}$换成$x=k$, 为方便起见, 我们只考虑定直线在右顶点右边的情形.

(i) 若$a<k<\dfrac{a^2}{c}$时, 右焦点F_2在以线段PQ为直径的圆内部;

(ii) $k>\dfrac{a^2}{c}$时, 右焦点F_2在以线段PQ为直径的圆外部.

证明的过程留给有兴趣的读者完成, 在此不再赘述.

二、结论的再推广

虽然给出了几何形式的证明, 笔者仍对这个问题抱有浓厚的兴趣, 更一般地, 若PM与QN的交点不再是椭圆的左顶点, 而是椭圆上的一个动点, 还会有类似的性质吗? 笔者大胆地提出猜想, 并给出了其证明, 从而得到定理2.

定理2　设F_1、F_2是椭圆C : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的左、右焦点, A为椭圆上一动点, 过右焦点F_2的动直线l交椭圆于M、N两点, 直线AM、AN分别与椭圆右准线$x=\dfrac{a^2}{c}$交于P和Q, 则以线段PQ为直径的圆恒过右焦点F_2.

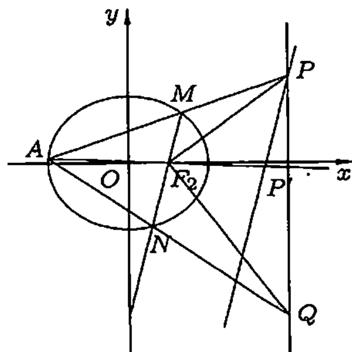


图 3

证明: 如图3, 过点P作直线MN的平行线, 交射线AF_2于点P', 由$MN\,/\!/\,PP'$得$\dfrac{AF_2}{MF_2}=\dfrac{AP'}{PP'}$. 又根据椭圆的第二定义, 变形有

$$\frac{AF_2}{MF_2}=\frac{A\text{到右准线的距离}}{M\text{到右准线的距离}}=\frac{AP}{MP}.$$

而由$MN/\!/PP'$还可得$\dfrac{AP}{MP}=\dfrac{AP'}{F_2P'}$, 从而有$\dfrac{AP'}{PP'}=\dfrac{AP'}{F_2P'}$, 则有$PP'=F_2P'$, 则有$\angle P'F_2P=\angle F_2PP'$, 而由$MN/\!/PP'$得$\angle MF_2P=\angle F_2PP'$, 所以有$\angle MF_2P=\angle PF_2P'$, 即$F_2P$为$\angle MF_2P'$平分线.

同理F_2Q为$\angle NF_2P'$平分线, 则有$\angle PF_2Q=90°$, 则以线段PQ为直径的圆恒过右焦点, 命题得证.

三、结论的引申

考虑到圆锥曲线某些性质上的一致性, 很自然地, 有了椭圆中的结论, 作为对问题的深入研究, 我们考虑是否可以将该命题推广到双曲线与抛物线上, 经研究发现仍有类似结论成立.

定理3　设F_1、F_2是双曲线C : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$的左、右焦点, A为双曲线上一动点, 过右焦点F_2的动直线l交双曲线于M、N两点, 直线AM、AN分别与双曲线右准线$x=\dfrac{a^2}{c}$交于P和Q, 则以线段PQ为直径的圆恒过右焦点F_2.

证明分三种情形:

情形1: 动直线与双曲线一支有2个交点, 且双曲线上所取动点在双曲线另一支上, 见图4.

根据双曲线第二定义, 变形有

$$\frac{AF_2}{MF_2}=\frac{A\text{到右准线的距离}}{M\text{到右准线的距离}}=\frac{AP}{MP}.$$

在三角形AF_2M中, 由角平分线定理的逆定理得, F_2P为$\angle AF_2M$平分线.

同理得F_2Q为$\angle AF_2N$平分线, 从而有$\angle PF_2Q=90°$, 以线段PQ为直径的圆恒过右焦点, 命题得证.

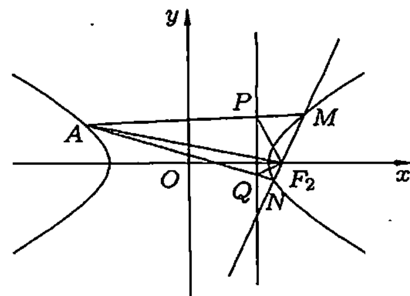


图 4

情形2: 动直线与双曲线一支有2个交点, 且

双曲线上所取动点在双曲线同一支上, 见图5.

过点Q作直线MN的平行线, 交直线AF_2于点Q', 由$MN//QQ'$得, $\frac{QQ'}{Q'A}=\frac{NF_2}{AF_2}$, 根据双曲线的定义, 变形有

$$\frac{NF_2}{AF_2}=\frac{N\text{到右准线的距离}}{A\text{到右准线的距离}}=\frac{QN}{QA}.$$

而由$MN//QQ'$还可得$\frac{QN}{QA}=\frac{Q'F_2}{Q'A}$, 从而有$\frac{QQ'}{Q'A}=\frac{Q'F_2}{Q'A}$, 则$QQ'=Q'F_2$, 则有$\angle Q'QF_2=\angle Q'F_2Q$. 由$MN//QQ'$得$\angle Q'QF_2=\angle QF_2M$, 所以有$\angle Q'F_2Q=\angle QF_2M$, 即$F_2Q$为$\angle MF_2Q'$平分线.

同理F_2P为$\angle NF_2Q'$平分线, 所以有$\angle PF_2Q=90°$, 故以线段PQ为直径的圆恒过右焦点, 命题得证.

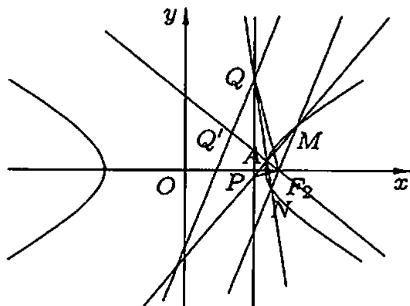


图 5

情形3: 动直线与双曲线两支各有1个交点, 见图6.

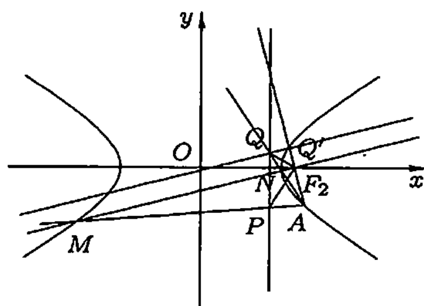


图 6

过点Q作直线MN的平行线, 交直线AF_2于点Q'. 由$MN//QQ'$得$\frac{QQ'}{Q'A}=\frac{NF_2}{AF_2}$, 根据双曲线的定义, 变形有

$$\frac{NF_2}{AF_2}=\frac{N\text{到右准线的距离}}{A\text{到右准线的距离}}=\frac{QN}{QA}.$$

由$MN//QQ'$还可得$\frac{QN}{QA}=\frac{Q'F_2}{Q'A}$, 从而有$\frac{QQ'}{Q'A}=\frac{Q'F_2}{Q'A}$, 则$QQ'=Q'F_2$, 则有$\angle Q'QF_2=\angle Q'F_2Q$.

由$MN//QQ'$得$\angle Q'QF_2=\angle QF_2M$, 所以有$\angle Q'F_2Q=\angle QF_2M$, 即$F_2Q$为$\angle MF_2Q'$平分线, 另一方面, 在三角形$MF_2A$中, 根据双曲线的定义, 变形有

$$\frac{MF_2}{AF_2}=\frac{M\text{到右准线的距离}}{A\text{到右准线的距离}}=\frac{MP}{AP}.$$

由内角平分线逆定理得, F_2P为$\angle AF_2M$平分线, 所以有$\angle PF_2Q=90°$, 故以线段PQ为直径的圆恒过右焦点, 命题得证.

定理4 设F是抛物线$C: y^2=2px\,(p>0)$的焦点, A为抛物线上一动点, 过焦点F的动直线l交抛物线于M、N两点, 直线AM、AN分别与抛物线准线$x=-\frac{p}{2}$交于P和Q, 则以线段PQ为直径的圆恒过焦点F.

证明: 如图7, 过点Q作直线MN的平行线, 交直线AF于点Q', 由$MN//QQ'$得$\frac{QQ'}{Q'A}=\frac{NF}{AF}$, 根据抛物线的定义, 变形有

$$\frac{NF}{AF}=\frac{N\text{到准线的距离}}{A\text{到准线的距离}}=\frac{QN}{QA}.$$

由$MN//QQ'$还可得$\frac{QN}{QA}=\frac{Q'F}{Q'A}$ 从而有$\frac{QQ'}{Q'A}=\frac{Q'F}{Q'A}$, 则$QQ'=Q'F$, 则有$\angle Q'QF=\angle Q'FQ$, 由$MN//QQ'$得$\angle Q'QF=\angle QFM$, 所以有$\angle Q'QF=\angle QFM$, 即$FQ$为$\angle MFQ'$平分线.

同理FP为$\angle NFQ'$平分线, 所以有$\angle PFQ=90°$, 故以线段PQ为直径的圆恒过焦点, 命题得证.

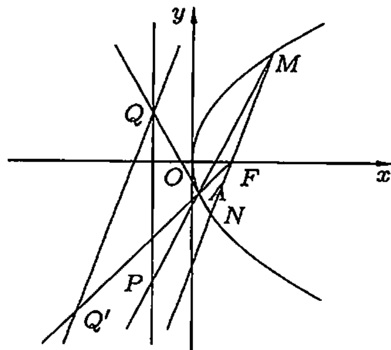


图 7

2012年上海市普通高等学校春季招生考试

数学试卷

本试卷共23道试题，满分150分，考试时间120分钟

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果．每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1. 已知集合 $A=\{1,2,k\}$, $B=\{2,5\}$. 若 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$, 则 $k=$______.

2. 函数 $y=\sqrt{x+1}$ 的定义域为______.

3. 抛物线 $y^2=8x$ 的焦点坐标为______.

4. 若复数 z 满足 $\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$ (i为虚数单位)，则 $z=$______.

5. 函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为______.

6. 方程 $4^x-2^{x+1}=0$ 的解为______.

7. 若 $(2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$______.

8. 若 $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+m)}{x}$ 为奇函数，则实数 $m=$______.

9. 函数 $y=\log_2 x+\dfrac{4}{\log_2 x}$ $(x\in[2,4])$ 的最大值是______.

10. 若复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{2}$ (i为虚数单位)，则 z 在复平面内所对应的图形的面积为______.

11. 某校要从2名男生和4名女生中选出4人担任某游泳赛事的志愿者工作，则在选出的志愿者中，男、女都有的概率为______(结果用数值表示).

12. 若不等式 $x^2-kx+k-1>0$ 对 $x\in(1,2)$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是______.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项及公差均为正数，令 $b_n=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{2012-n}}$ $(n\in\mathbf{N}^*, n<2012)$. 当 b_k 是数列 $\{b_n\}$ 的最大项时，$k=$______.

14. 若矩阵 $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 满足: $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\{-1,1\}$, 且 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=0$, 则这样的互不相等的矩阵共有______个.

二、选择题（本大题满分20分）本大题共有4题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，考生必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得5分，否则一律得零分．

15. 已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$, $C_2:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$, 则 [答]( )

(A) C_1 与 C_2 顶点相同.
(B) C_1 与 C_2 长轴长相等.
(C) C_1 与 C_2 短轴长相等.
(D) C_1 与 C_2 焦距相等.

16. 记函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$.

四、反思

经过推广，引申，我们将椭圆中的一个性质在更大范围揭示出来．通过在任教班级的实验，学生的探究热情、能力和成果超出了笔者最初的设想．笔者觉得，这个问题完全可作为高中生开展数学研究性学习的一个良好素材．爱因斯坦说过“提出一个问题往往比解决一个问题更重要，从新的角度去看旧的问题，需要有创造性的想象力，这标志着科学的真正进步”．在教学实践中，鼓励学生提出问题比鼓励学生解决问题重要得多，也许有些时候，学生的问题比较幼稚，他们得出的结论在我们看来也许价值不大，但这正是创造新思维的萌芽，最大的价值在于研究过程本身．当然作为素材，该问题还有不少深入研究的空间，笔者在此仅仅是抛砖引玉，希望同行批评指正．

如果函数$y=f(x)$的图像过点$(1,0)$，那么函数$y=f^{-1}(x)+1$的图像过点 [答]( )

(A) $(0,0)$. (B) $(0,2)$.

(C) $(1,1)$. (D) $(2,0)$.

17. 已知空间三条直线l、m、n. 若l与m异面，且l与n异面，则 [答]( )

(A) m与n异面. (B) m与n相交.

(C) m与n平行.

(D) m与n异面、相交、平行均有可能.

18. 设O为$\triangle ABC$所在平面上一点. 若实数x、y、z满足$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ $(x^2+y^2+z^2\neq 0)$，则"$xyz=0$"是"点O在$\triangle ABC$的边所在直线上"的 [答]( )

(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分又不必要条件.

三、解答题(本大题满分74分)本大题共有5题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

19. (本题满分12分)本题共有两个小题，第1小题满分6分，第2小题满分6分.

如图1，正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为1，高为2，M为线段AB的中点. 求:

(1) 三棱锥C_1-MBC的体积;

(2) 异面直线CD与MC_1所成角的大小(结果用反三角函数值表示).

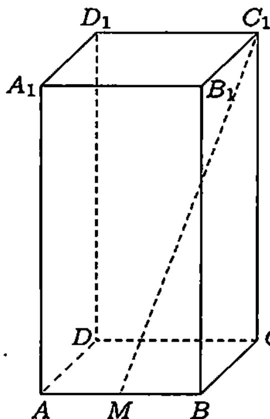


图 1

20. (本题满分14分)本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分.

某环线地铁按内、外环线同时运行，内、外环线的长均为30千米(忽略内、外环线长度差异).

(1) 当9列列车同时在内环线上运行时，要使内环线乘客最长候车时间为10分钟，求内环线列车的最小平均速度;

(2) 新调整的方案要求内环线列车平均速度为25千米/小时，外环线列车平均速度为30千米/小时.现内、外环线共有18列列车全部投入运行，要使内、外环线乘客的最长候车时间之差不超过1分钟，问: 内、外环线应各投入几列列车运行?

21. (本题满分14分)本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

已知双曲线C_1: $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

(1) 求与双曲线C_1有相同的焦点，且过点$P(4,\sqrt{3})$的双曲线C_2的标准方程;

(2) 直线l: $y=x+m$分别交双曲线C_1的两条渐近线于A、B两点. 当$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$时，求实数$m$的值.

22. (本题满分16分)本题共有3个小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足$(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)=c_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 设$c_n=3n+6$，$\{a_n\}$是公差为3的等差数列. 当$b_1=1$时，求b_2、b_3的值;

(2) 设$c_n=n^3$，$a_n=n^2-8n$，求正整数k，使得一切$n\in\mathbf{N}^*$，均有$b_n\geqslant b_k$;

(3) 设$c_n=2^n+n$，$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$. 当$b_1=1$时，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

23. (本题满分18分)本题共有3个小题，第1小题满分3分，第2小题满分6分，第3小题满分9分.

定义向量$\overrightarrow{OM}=(a,b)$的"相伴函数"为$f(x)=a\sin x+b\cos x$; 函数$f(x)=a\sin x+b\cos x$的"相伴向量"为$\overrightarrow{OM}=(a,b)$(其中$O$为坐标原点). 记平面内所有向量的"相伴函数"构成的集合为S.

(1) 设$g(x)=3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+4\sin x$，求证: $g(x)\in S$;

(2) 已知$h(x)=\cos(x+\alpha)+2\cos x$，且$h(x)\in S$，求其"相伴向量"的模;

(3) 已知$M(a,b)$ $(b\neq 0)$为圆C: $(x-2)^2+y^2=1$上一点，向量$\overrightarrow{OM}$的"相伴函数"$f(x)$在$x=x_0$处取到最大值. 当点M在圆C上运动时，求$\tan 2x_0$的取值范围.

参考答案

一、(第1至14题)

1. 3.　2. $[-1,\infty)$.　3. (2, 0).

4. 1−i.　5. π.　6. $x=1$.　7. 1.

8. −2.　9. 5.　10. 2π.　11. $\frac{14}{15}$.

12. $(-\infty,2]$.　13. 1006.　14. 8.

二、(第15至18题)

题号	15	16	17	18
代号	D	B	D	C

三、(第19至23题)

19. [解] (1) $S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

又C_1C为三棱锥C_1-MBC的高,

$\therefore V_{C_1-MBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle MBC}\cdot C_1C=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{6}$.

(2) $\because CD/\!/AB$,

$\therefore \angle C_1MB$为异面直线CD与MC_1所成的角(若其补角).

连结BC_1, $\because AB\perp$平面BCC_1B_1,

$\therefore AB\perp BC_1$.

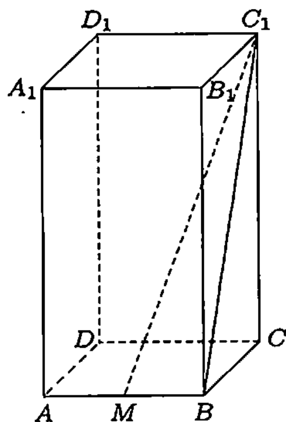


图 2

在Rt$\triangle MBC_1$中,

$BC_1=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, $MB=\frac{1}{2}$.

$\therefore \tan\angle C_1MB=\frac{\sqrt{5}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{5}$,

$\therefore \angle C_1MB=\arctan 2\sqrt{5}$,

即异面直线CD与MC_1所成角的大小为$\arctan 2\sqrt{5}$.

20. [解] (1) 设内环线列车运行的平均速度为v千米/小时.

由题意可知, $\frac{30}{9v}\times 60\leqslant 10$, 解得$v\geqslant 20$.

所以, 要使内环线乘客最长候车时间为10分钟, 列车的最小平均速度是20千米/小时.

(2) [解法一] 设内环线投入x列列车运行, 则外环线投入$(18-x)$列列车运行, 内、外环线乘客最长候车时间分别为t_1、t_2分钟,

则$t_1=\frac{30}{25x}\times 60=\frac{72}{x}$, $t_2=\frac{30}{30(18-x)}\times 60=\frac{60}{18-x}$,

于是有$|t_1-t_2|=\left|\frac{72}{x}-\frac{60}{18-x}\right|\leqslant 1$,

即$\begin{cases}x^2-150x+1296\leqslant 0,\\ x^2+114x-1296\leqslant 0,\end{cases}$ 解得

$\frac{150-\sqrt{17316}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-114+\sqrt{18180}}{2}$.

又$\because x\in\mathbf{N}^*$, 所以$x=10$.

所以, 当内环线投入10列, 外环线投入8列列车运行时, 内、外环线乘客最长候车时间之差不超过1分钟.

[解法二] 设内环线投入x列列车运行, 则外环线投入$(18-x)$列列车运行, 内、外环线乘客最长候车时间分别为t_1、t_2分钟,

则$t_1=\frac{30}{25x}\times 60=\frac{72}{x}$, $t_2=\frac{30}{30(18-x)}\times 60=\frac{60}{18-x}$,

于是有$|t_1-t_2|=\left|\frac{72}{x}-\frac{60}{18-x}\right|\leqslant 1$,

记$f(x)=\frac{72}{x}+\frac{60}{x-18}$ $(x<18, x\in\mathbf{N}^*)$, 则$f(x)$是单调递减函数.

又$f(9)\approx 1.33$, $f(10)=-0.30$, $f(11)\approx -2.03$, 所以$x=10$.

所以, 当内环投入10列, 外环投入8列列车运行时, 内外环线乘客最长候车时间之差不超过1分钟.

21. [解] 双曲线C_1的焦点坐标为$(\sqrt{5},0)$、$(-\sqrt{5},0)$,

设双曲线C_2的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 则

$\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \frac{16}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$

$\therefore$ 双曲线C_2的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2) 双曲线C_1的渐近线方程为$y=2x$, $y=$

$-2x$.

设$A(x_1,2x_1),B(x_2,-2x_2)$.

$\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=0, \\ y=x+m, \end{cases}$ 得$3x^2-2mx-m^2=0$,

由$\Delta=16m^2>0$, 得$m\neq 0$.

$\because x_1x_2=-\dfrac{m^2}{3}$,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(2x_1)(-2x_2)=-3x_1x_2$,

$\therefore m^2=3$, 即$m=\pm\sqrt{3}$.

22. [解] (1) $\because a_{n+1}-a_n=3$, $\therefore b_{n+1}-b_n=n+2$.

$\because b_1=1, \therefore b_2=4, b_3=8$.

(2) $\because a_{n+1}-a_n=2n-7$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{n^3}{2n-7}$.

由$b_{n+1}-b_n>0$, 解得$n\geqslant 4$, 即

$b_4<b_5<b_6<\cdots$.

由$b_{n+1}-b_n<0$, 解得$n\leqslant 3$, 即

$b_1>b_2>b_3>b_4$.

$\therefore k=4$.

(3) $\because a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}$, $\therefore b_{n+1}-b_n=(-1)^{n+1}(2^n+n)$.

$\therefore b_n-b_{n-1}=(-1)^n(2^{n-1}+n-1)\ (n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$. ....(*)

由(*)得: $b_2-b_1=2^1+1$,

$b_3-b_2=(-1)(2^2+2)$,

$\cdots$,

$b_{n-1}-b_{n-2}=(-1)^{n-1}(2^{n-2}+n-2)$,

$b_n-b_{n-1}=(-1)^n(2^{n-1}+n-1)$.

当$n=2k\,(k\in\mathbf{N}^*)$时, 以上各式相加得

$$\begin{aligned} b_n-b_1 &=(2-2^2+\cdots-2^{n-2}+2^{n-1}) \\ &\quad +[1-2+\cdots-(n-2)+(n-1)] \\ &=\frac{2-2^{n-1}(-2)}{1-(-2)}+\frac{n}{2} \\ &=\frac{2+2^n}{3}+\frac{n}{2}, \end{aligned}$$

$\therefore b_n=\dfrac{2+2^n}{3}+\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{5}{3}$.

当$n=2k-1\,(k\in\mathbf{N}^*)$时,

$b_n=b_{n+1}-(-1)^{n+1}(2^n+n)=\dfrac{2+2^{n+1}}{3}+\dfrac{n+1}{2}+1-(2^n+n)=-\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{13}{6}$.

$$\therefore b_n=\begin{cases} -\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{13}{6}, & n=2k-1, \\ \dfrac{2^n}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{5}{3}, & n=2k, \end{cases} \quad k\in\mathbf{N}^*.$$

23. [证明] (1) $g(x)=3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+4\sin x=4\sin x+3\cos x$,

其"相伴向量"$\overrightarrow{OM}=(4,3)$, $\therefore g(x)\in S$.

[解] (2) $h(x)=\cos(x+\alpha)+2\cos x$

$=(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)+2\cos x$

$=-\sin\alpha\sin x+(\cos\alpha+2)\cos x$,

$\therefore$ 函数$h(x)$的"相伴向量"$\overrightarrow{OM}=(-\sin\alpha, \cos\alpha+2)$,

则$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha+2)^2}=\sqrt{5+4\cos\alpha}$.

(3) $\overrightarrow{OM}$的"相伴函数"$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$,

其中$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

当$x+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$时, $f(x)$取到最大值, 故$x_0=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi, k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore \tan x_0=\tan\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cot\varphi=\dfrac{a}{b}$,

$$\therefore \tan 2x_0=\frac{2\tan x_0}{1-\tan^2 x_0}=\frac{2\cdot\frac{a}{b}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{2}{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}},$$

$\dfrac{b}{a}$为直线OM的斜率, 由几何意义知,

$\dfrac{b}{a}\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

令$m=\dfrac{b}{a}$, 则$\tan 2x_0=\dfrac{2}{m-\frac{1}{m}}$, $m\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

当$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant m<0$时, 函数$\tan 2x_0=\dfrac{2}{m-\frac{1}{m}}$单调递减, $\therefore 0<\tan 2x_0\leqslant\sqrt{3}$;

当$0<m\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时, 函数$\tan 2x_0=\dfrac{2}{m-\frac{1}{m}}$单调递减, $\therefore -\sqrt{3}\leqslant\tan 2x_0<0$.

综上所述, $\tan 2x_0\in[-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3}]$.

数学问题与解答

2011年第12期问题解答

841. 在对边乘积相等的圆内接凸四边形$ABCD$中, M为对角线BD的中点, T为劣弧$\overset{\frown}{BC}$上一点, 则A、M、T三点共线的充要条件是$CT/\!/DB$.

(410081 湖南师范大学数学系 沈文选供题)

证: 如图1, 由题设, 在圆内接四边形$ABCD$中, $AB\cdot CD=BC\cdot DA$. 连DT、BT、AC.

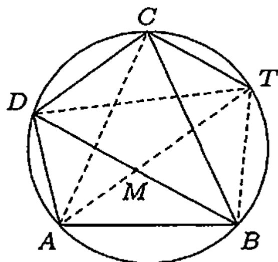


图 1

充分性: 由$CT/\!/DB$知四边形$DBTC$为等腰梯形, 从而$CD=TB$, $DT=BC$. 由$AB\cdot CD=BC\cdot DA$有$AB\cdot BT=DT\cdot DA$. 注意到$\angle ABT$与$\angle TDA$互补, 知$\frac{1}{2}AB\cdot BT\cdot\sin\angle ABT=\frac{1}{2}DT\cdot DA\cdot\sin\angle TDA$, 即$S_{\triangle ABT}=S_{\triangle ADT}$. 由此即知$AT$过$DB$的中点, 故$A$、$M$、$T$三点共线.

必要性: 设A、M、T三点共线. 由托勒密定理及题设有$BC\cdot DA=\frac{1}{2}AC\cdot DB=AC\cdot\frac{1}{2}DB=AC\cdot DM$, 即$\frac{BC}{AC}=\frac{DM}{DA}$. 注意到$\angle BCA=\angle BDA=\angle MDA$, 知$\triangle CAB\backsim\triangle DAM$, 从而$\angle CAB=\angle DAM=\angle DAT$, 即$\angle TAB=\angle DAC$. 于是$\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{BT}$, $CT/\!/DB$.

842. 在正项数列$\{a_n\}$中, 对任意正整数n, 均有$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{1}{3}(2n+1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$, 求证: $a_n=n$.

(712000 陕西咸阳师范学院基础教育课程研究中心 安振平供题)

证: 当$n=1$时, 有$a_1^2=a_1$.

$\because a_1>0$, $\therefore a_1=1$.

假设$n=1,2,\cdots,k$时, $a_n=n$, 则当$n=k+1$时, 由$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k+1}^2=\frac{1}{3}(2k+3)(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})$

得 $1^2+2^2+\cdots+k^2+a_{k+1}^2$

$=\frac{1}{3}(2k+3)(1+2+\cdots+k+a_{k+1})$,

即 $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+a_{k+1}^2$

$=\frac{1}{3}(2k+3)\left[\frac{k(k+1)}{2}+a_{k+1}\right]$,

整理得

$3a_{k+1}^2-(2k+3)a_{k+1}-k(k+1)=0$,

$[a_{k+1}-(k+1)](3a_{k+1}+k)=0$.

$\because a_{k+1}>0$, $\therefore a_{k+1}=k+1$.

由数学归纳法, 便知对任意正整数n, 均有$a_n=n$.

843. 设实数a、$b>0$, $n\in\mathbf{N}^*$, 求证:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}<\frac{n}{\sqrt{a(a+nb)}}.$$

(201600 上海松江二中 卫福山供题)

证: 对$k\in\mathbf{N}$, $\frac{1}{(a+kb)[a+(k+1)b]}$

$=\frac{1}{b}\left[\frac{1}{a+kb}-\frac{1}{a+(k+1)b}\right]$,

于是$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(a+kb)[a+(k+1)b]}$

$=\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+nb}\right)=\frac{n}{a(a+nb)}$.

又$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a+kb}{a+(k+1)b}<n$,

利用柯西不等式有$\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{a+(k+1)b}\right]^2$

$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(a+kb)[a+(k+1)b]}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a+kb}{a+(k+1)b}$

$<\frac{n^2}{a(a+nb)}$.

所以原不等式成立.

844. 已知a、b、c是三个互不相等的实数, 求证: $\frac{a^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2}{(c-a)^2}\geqslant 1$.

(318015 浙江台州市椒江区洪家中学 邬天泉供题)

证: 先证明一个恒等式

$$\frac{a^2}{(a-b)^2}+\frac{b^2}{(b-c)^2}+\frac{c^2}{(c-a)^2}-1=\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}-1\right)^2.\cdots\cdots①$$

该等式等价于 $\frac{ab}{(a-b)(b-c)}+\frac{bc}{(b-c)(c-a)}+\frac{ca}{(c-a)(a-b)}+1=\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\cdots②$

② 式的右边$=$

$$\frac{3abc-2(a^2b+b^2c+c^2a)+ab^2+bc^2+ca^2}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

而$\frac{ab}{(a-b)(b-c)}+\frac{bc}{(b-c)(c-a)}+\frac{ca}{(c-a)(a-b)}=\frac{3abc-(a^2b+b^2c+c^2a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$,

$(a-b)(b-c)(c-a)$

$=ab^2+bc^2+ca^2-(a^2b+b^2c+c^2a)$,

于是可得 ② 式成立. 所以恒等式 ① 也成立.

根据恒等式 ① 可知原不等式成立, 且原不等式等号成立的充要条件为$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}=1\Longleftrightarrow 3abc=a^2b+b^2c+c^2a\Longleftarrow\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=3$. 譬如$(a,b,c)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1\right)$时, 原不等式取等号.

845. 设$x\in\mathbf{Q}$, $x>0$ ($\mathbf{Q}$表示有理数集), 求证: 能找到n个不同正整数a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 使$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

(法国考题 200002 上海黄浦区教师进修学院 周元解答)

证: 当$x=1$时, 结论显然成立. 若$x>1$, 则由于调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的, 因此存在$k\in\mathbf{N}^*$, $k\geqslant 2$, 使$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}<x\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$; 若$0<x<1$, 则存在$k\in\mathbf{N}^*$, 使$\frac{1}{k+1}\leqslant x<\frac{1}{k}$.

当$x=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$或$x=\frac{1}{k+1}$时, 结论已经成立. 下设$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}<x<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$或$\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$. 对前者, 记$x-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)=\frac{n}{m}$; 对后者记$x=\frac{n}{m}(m、n\in\mathbf{N}^*,n<m)$, 则$\frac{n}{m}<\frac{1}{k}$. 只要证明, $\frac{n}{m}$能写成若干个都大于k的不同正整数的倒数和, 命题即可获证.

由带余除法, 存在$q\in\mathbf{N}^*,r\in\mathbf{N}$, 使$m=qn-r$, $0\leqslant r<n$. 于是$q=\frac{m+r}{n}\geqslant\frac{m}{n}>k$.

若$r=0$, 则$\frac{n}{m}=\frac{1}{q}$, 断言成立. 若$0<r<n$, 则$\frac{n}{m}=\frac{1}{q}+\frac{r}{mq}$. 分数$\frac{r}{mq}$的分子$r$至少比$n$小1; 且$\frac{r}{mq}<\frac{n}{mq}<\frac{1}{kq}\leqslant\frac{1}{q}$. 若$\frac{r}{mq}$不是正整数的倒数, 则上述的做法还可继续. 因为分子n是一个确定的正整数, 因此有限步后, 必能使$r=0$或1, 即能将$\frac{n}{m}$写成若干个都大于k的不同正整数的倒数和.

2012 年第2期问题

846. 在$\triangle ABC$中, $\angle C=90°$, D是AB上一点, 使$BD=BC$; E是过A且垂直于AB的直线上一点(点E、C在AB的同侧), 且使$AE=AC$; DE交AC于点F, 求证: $\frac{1}{DF}-\frac{1}{DC}=\frac{2}{DE}$.

(401555 重庆市合川太和中学 袁安全供

(下转第2-34页)

简说控制论

200062 华东师范大学数学系 郑英元

犹太血统的美国科学家维纳(Norbert Wiener, 1894-1964)曾先后涉足哲学、数学、物理学、工程学和生物学等方面的研究,并都有不同程度的贡献,但他的最大贡献是创立控制论.这是一门以数学为纽带,把研究自动调节、通信工程、计算机和计算技术以及生物科学中的神经生理学和病理学等学科时,所共同关心的共性问题联系起来研究,而形成新的边缘学科.维纳于1948年发表了著名的《控制论——关于在动物和机器中控制和通讯的科学》一书.此后,控制论的思想和方法已经渗透到了几乎所有的自然科学和社会科学领域.维纳认为控制论可看作是一门研究动态系统在变化的环境条件下如何保持平衡状态或稳定状态的科学.他特意创造"Cybernetics"这个英语新词来命名这门科学.

图1是以色列为纪念犹太科学家维纳发行的邮票,邮票右边的边纸上注明了维纳是数学家及他的生卒年份.

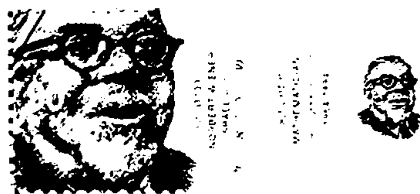


图1(以色列, 1999)

如果要追溯"控制论"一词最初来源,应该说是著名的法国物理学家安培(A.M.Ampère,1775-1836, 图2),他于1934年写了一篇论述科学哲理的文章,他在进行科学分类时,把管理国家的科学称为"控制论",他把希腊文"mberuhhtz"译成法文"Cybernetigue",原意为"操舵术",也就是掌舵的方法和技术的意思.可以认为维纳发明"控制论"这个词正是受了安培的启发.

说到控制论,还必须说中国科学家钱学森(1911-2009, 图3)院士在控制论方面的贡献.钱学森1934年毕业于交通大学机械工程系,1939年获美国加州理工学院航空、数学博士学位.1954年,钱学森发表《工程控制论》一书.钱学森在控制领域的工作引起了控制领域的轰动,并在上世纪五六十年代形成研究高潮.钱学森将控制论的主要问题概括为"一个系统的不同部分之间相互作用的定性性质,以及由此决定的整个系统总体的运动状态"的研究.而工程控制论则被界定为研究控制论这门科学中能够直接用在控制系统工程设计的那些部分,它除了应当包括伺服系统工程实际的内容之外,更深刻更重要的在于作为技术科学,应把工程实际中各种原理方法整理总结成为理论,以显示其在不同领域应用中的共性,以及许多基本概念的重要作用.它的重点在于理论分析,而不是系统部件的详细构造和设计问题.1957年,钱学森的《工程控制论》获得中国科学院自然科学奖一等奖.同年9月,国际自动控制联合会(International Federation of Automatic Control, 简称IFAC)成立大会推举钱学森为第一届IFAC理事会常务理事,他成为了该组织第一届理事会中唯一的中国人.



图2(法国, 1936)



图3(中国, 2011)

在半个多世纪以年来,控制论的应用已经遍布到生物医学、生理生态、环境、能源、政治、军事和社会科学的各个领域.也因此出现许多新的分支,如:医学控制论、神经控制论、生物控制论、环境控制论、经济控制论、社会控制论、生态控制论、自然控制论、智能控制论、军事控制论以及人口控制论、资源控制论等等,并在国民经济和社会发展中起着重要的作用.

编后漫笔

多多研究从“双基”到“四基”的发展

张奠宙　赵小平

《义务教育数学课程标准》的修订稿，明确强调实行数学教学的“四基”，即在原来双基“基础知识和基本技能”的基础上，增加“基本思想和基本活动经验”．这是一个十分可喜的进展．

晚近以来的中国教育，“基础”二字很不受待见，更强调的是创新，似乎没有扎实的基础也可以创新．常常听到中国教育“基础过剩”的责难，即便美国数学教育界提出来的“为了成功打好基础”的口号，也被解释为“人家的基础不是我们的基础，那是创新的基础”．更有一个挖苦的说法是“你背九九表，我拿诺贝尔”，好像不会背九九表才能拿诺贝尔奖似的．平心而论，中国本土的科学研究没有获得诺贝尔奖，把板子打在基础教育身上是不公平的．

中国的基础教育有自己的道路．1963年，教育部颁布新中国第一个自主研制、具有本土特色的数学教学大纲，其中明确提出要加强基础数学知识和基本数学技能的教学，这是“数学双基教学”的起源．这份大纲还提出了具有创意的三大能力：“运算能力、逻辑思维能力，空间想象能力”．以后的历次数学教学大纲，除了以上的“双基”与“三大能力”之外，还强调要培养“运用数学分析问题和解决问题的能力”．这些提法，在数学知识与能力、数学基础与创新之间，呈现出辩证合理的衔接与平衡．

《义务教育数学课程标准》提出的“四基”是对“双基＋能力”教育传统的继承、发扬、改进和创新，我们要进一步理清的是，“基础”是哪些？与创新的关系怎样？“四基”之间的关系如何？怎样把“四基”落实到课堂上？这是推进教育改革的有效行动．

（上接第2-21页）

2010年江苏高考试题：在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的左、右顶点为$A$、$B$，右焦点为$F$，设过点$T(t,m)$的直线$TA$、$TB$与此椭圆分别交于点$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，其中$m>0$，$y_1>0$，$y_2<0$．

(1)、(2)略．(3)设$t=9$，求证：直线MN必过x轴上的一定点(其坐标与m无关)．

本题可看作是结论2.2逆命题的特例．

2010年四川高考试题：已知定点$A(-1,0)$、$F(2,0)$，定直线$l:x=\frac{1}{2}$，不在x轴上的动点P与点F的距离是它到直线l的距离的2倍．设点P的轨迹为E，过点F的直线交E于B、C两点，直线AB、AC分别交l于点M、N．

(1)求E的方程；

(2)试判断以线段MN为直径的圆是否过点F，并说明理由．

本题可看作是结论7的特例．

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2012年第2期(总第294期)

名誉主编：张奠宙
主　　编：赵小平
常务副主编：忻重义
发行范围：公　开
电　　话：021-62232712

主管单位：中华人民共和国教育部
主办单位：华东师范大学
出　　版：上海《数学教学》杂志社
邮政编码：200062(上海中山北路3663号)
广告许可证：3100720050001
印　　刷：华东师范大学印刷厂
国内总发行：上海市邮政局报刊发行局
国内订阅：全国各邮电局
电子信箱：sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价：5.50元　国内统一连续出版物号：CN31-1024/G4　每月12日出版　代号：4-357